李群和李代数简介

曹雨芳　刘辽编



北京师范大学出版社

李群和李代数简介

曹雨芳 刘辽 编



北京师范大学出版社

李群和李代数简介

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4.75 字数：97千
1987年2月第1版 1988年4月第2次印刷
印数：3 301—4 300

ISBN7-303-00106-9/O·29
定价：0.78元

内容简介

本书内容曾作为物理系理论物理研究生的教材，其特点是用最少的篇幅先介绍群论的一般性理论，然后立即进入李群和李代数，以使学习场论和粒子物理的学生能用较少的时间获得这方面必要的数学知识；在表述上，虽力求正确，但并不追求论证的严格性，这种处理对于学习理论物理的学生来说可能是比较合适的。本书可作理论物理研究生的教材，也可供大学教师及科研人员参考。

前　言

本书内容曾作为物理系理论物理研究生的教材，于1977年和1979年使用过二次。本书企图用最少的篇幅先介绍群论的一般性理论，然后立即进入李群和李代数，以使学习场论和粒子物理的学生能用较少的时间获得这方面必要的数学知识。本书虽力求表述的正确性，但并不追求论证的严格性，我们认为，这种处理对于学习理论物理的学生来说可能是比较合适的。

在本教材使用过程中，不少同志提出过许多改进意见，特别是朱培豫同志仔细地校订了原稿，我们谨对他们致以深切的谢意。由于水平所限，内容仍难免有不妥甚至错误之处，欢迎读者提出宝贵意见。

刘　辽　（北京师范大学　物理系）
曹雨芳　（华东师范大学　物理系）

目　　录

第一章　有限群基本理论

§1　群的概念

符合某种特定条件的一些元素$\{g_1, g_2, \cdots, g_k, \cdots, g_n\}$等构成一集合$G$，若对其中任二元素$g_i$、$g_k$定义一个《运算》($g_i \cdot g_k$)且满足下列四个条件，则称为一个群。

1．若g_i、$g_k \in G$　则$g_i \cdot g_k \in G$.

2．元素间的运算满足结合律 $g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$。

3．在G内可定义单位元素g_0 (或e)，使G中每一个g_i都有　$g_i \cdot g_0 = g_0 \cdot g_i = g_i$　　($g_i \cdot e = e \cdot g_i = g_i$).

4．对于每个g_i，在G中都存在一个元素g_i^{-1}，使

$$g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = g_0 \text{ (或} e\text{)}$$

应注意到同一集合对于某种运算构成群，但对另一种运算可以不构成群。一般说来，群的元素间的运算未必满足对易律。假使一个群，它的元素间运算满足对易律：

$$g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$$

就叫阿贝尔群。

例　(1) 一个单位元素$\{g_0$(或e)$\}$的集合，元素间的《运算》是通常的乘法构成一个群。

(2) 所有实数的集合，《运算》是通常的加法构成群，单位元素是0，此群是阿贝尔群。

(3) 原点O固定的实三维空间的旋转构成一个非阿贝尔群，它以旋转群$\mathbf{R}_3$或$SO(3, R)$来表示。

(4) 绕固定轴的旋转构成一阿贝尔群，它可用 O_2 或 $SO(2,R)$表示。

(5) 实四维矢量空间中使二次型

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_0{}^2$$

保持不变，且不使过去和将来发生交换的非奇异变换构成洛仑兹群。

(6)特殊线性群$SL(n,R)$和$SL(n,c)$是所有行列式为1而矩阵元为实数或复数的线性变换所构成的群。

(7) 特殊酉群$SU(n)$ 是n维矢量空间中行列式为1 的么正变换集合所构成的群。

(8)线性群$GL(n,R)$ 是由实数组成的非奇异线性变换所构成的群。

下面给出在矢量空间中使所有保持矢量长度不变的线性变换构成么正群(U群)的证明。

设：复矢量空间中任一矢量$\boldsymbol{x}$，线性变换u使所有的矢量长度保持不变：

$$\boldsymbol{x}'=u\boldsymbol{x} \quad 或 \quad x'_\mu=u_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.1.1}$$

要满足

$$x'^*_\mu x'_\mu=x^*_\mu x_\mu \tag{1.1.2}$$

(1.1.1)式代入(1.1.2)式，

$$u^*_{\mu\lambda}x^*_\lambda u_{\mu\rho}x_\rho=u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}x^*_\lambda x_\rho=\delta_{\lambda\rho}x^*_\lambda x_\rho$$

$$(u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}-\delta_{\lambda\rho})x^*_\lambda x_\rho=0$$

由$x^*_\lambda x_\rho$的任意性，得：

$$u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}=\delta_{\lambda\rho} \qquad \tilde{u}^*_{\lambda\mu}u_{\mu\rho}=\delta_{\lambda\rho}或\tilde{u}^*u=1或u^+u=1$$

或

$$u^+=u^{-1} \tag{1.1.3}$$

条件(1.1.3)是么正变换u的充要条件。

(a)如果有二个么正变换u、v，则由于

$$(uv)^{-1}(uv)=v^+u^+uv=1$$

所以乘积(uv)也是么正变换。

(b)如果么正变换u，则由于

$$(u^{-1})^+(u^{-1})=(u^+)^{-1}(u^{-1})=(uu^+)^{-1}=1$$

所以么正变换的逆变换u^{-1}也是么正变换。

(c)显然，单位矩阵1是一么正矩阵。即$1^+\cdot 1=1\cdot 1^+=1$。因此，在矢量空间中，所有保持矢量长度不变的线性变换构成一群，称作么正群$u(n)$。

(9)一组n个对象的所有不同置换构成一个群，称为"对称群S_n"。

用下列符号表示一种置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \alpha_n \end{pmatrix}$$

自然数$1,2,3,\cdots,n$标志n个对象，α_1 α_2 $\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n$是这个自然数的一种排列。上式表示的置换过程是：将1换为α_1，2换为α_2，3换为α_3 $\cdots$ n换为α_n。接连进行二个置换的结果称为这二个置换的乘积。以三个对象的置换为例，设P_1和P_2表示下列二个置换：

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

那末它们的乘积

$$P_1P_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

就是先进行置换P_2再进行置换P_1的结果。群中的单位元素是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

显然，每一个置换都有一个逆置换，它们相乘就得到单位元素。不难证明，置换的乘法满足结合律。

由有限个元素构成的群称为有限群，不同元素的个数叫作有限群的阶。反之，称作无限群。

上面例子中，(1)、(9)是有限群，其它均为无限群。

习题

(1)试证、 $(g_i \cdot g_k)^{-1} = g_k^{-1} \cdot g_i^{-1}$.

(2)证明：每一元素仅有一个逆元素。

(3)若$a, b \in G$，$h \in G$ 且$a \neq b$ 则 $ah \neq bh$。

§2 子群、共轭元素和类

定义：若群G中的一个子集g，按群G中所采用的运算也构成一个群，则g叫作群G的子群。

例 §1中例(4)是例(3)的子群，么正么模群 $SU(n)$ 是么正群$U(n)$的子群，三维空间转动群是洛仑兹群的子群，绕某个轴的转动群是旋转群的子群，特殊线性群$SL(n)$是线性群$GL(n)$的子群。

设a和b是群中某二个元素，元素$c = bab^{-1}$称作a的共轭元素。显然，若c和a共轭，那末a也和c共轭，而且c^{-1}和a^{-1}也相互共轭。若c和a共轭，a和d共轭，那末c和d也共轭。

所有和某一元素共轭的元素的集合，称作为群的一个类。若二个类中有一个元素是相同的，那末这二个类完全相同。若二个类不同，那末它们所有的元素都不同。因此可以将群的元素分成不同的类，每一个元素只属于其中的一个类。

§3 陪集、不变子群

设g是群G的一个子群，g群的元素是$1, b_1, b_2, \cdots, b_l$。

设a是群G中的任一元素，那末元素

$$a \cdot 1,\ a \cdot b_1,\ a \cdot b_2,\ \cdots,\ a \cdot b_l$$

称作由元素a生成的子群g的“左陪集”。并以符号ag表示。若a是子群g的元素，那末生成的左陪集就是子群g本身。若a不属于g，那末它所生成的左陪集不构成子群，因为在这一左陪集中不包含单位元素。若二个左陪集中有一个元素是相同的，则这二个左陪集完全相同。若二个左陪集不同，则它们所有的元素都不同。因此可以将群所有元素分成不同的左陪集，每一个元素只属于一个左陪集。

用类似的方法，可以定义右陪集(ga)，并讨论右陪集的性质。

定义：若对任一$a_i \in G$，满足

$$a_i g = g a_i \qquad \text{或} \qquad a_i g a_i^{-1} = g$$

则子群g叫作群G的不变子群（正规子群）。

可以看出：(1)任一群G有二个平庸的不变子群，即

$$g = \{1\} \qquad \text{和} \qquad g = \{G\}$$

(2)阿贝尔群的任一子群都是不变子群；

(3) $a_i g = g a_i$ 并不意味着 $a_i b_i = b_i a_i$ $(b_i \in g)$，而是表明不变子群的左陪集与右陪集相同.

定义：如果一个群，除单位元素外，没有不变子群，则此群叫单群。

如果一个群，除单位元素外，没有不变阿贝尔子群，则此群叫半单群。

显然，单群一定是半单的[注]。反之，不成立。以后将证明，洛仑兹群，四维和三维转动群是半单群，二维么模么正群是单群。因此，单群和半单群是物理学上有重要的意义的群。

定理1.3.1 设g是群G的不变子群，则所有g的陪集所组成的集合 $H=\{h_i\}=\{a_ig\}$ 构成一个群。

证明：(1)设有两个不同陪集h_i、h_j，则由于

$$h_ih_j=(a_ig)(a_jg)=a_i(ga_j)g=a_i(a_jg)g=a_kg$$

故乘积h_ih_j仍是子群g的陪集。

(2)因 $g(a_ig)=(ga_i)g=(a_ig)g=a_ig$

所以g是群H的单位元素。

(3)若有一个陪集 $h_i=a_ig$，则由于

$$(a_ig)^{-1}(a_ig)=(g^{-1}a_i^{-1})(a_ig)=g^{-1}a_i^{-1}a_ig=g^{-1}g=g\cdot g=g$$

故陪集的逆总是存在的。

(4)显然，陪集间乘法满足结合律。即证。

显然，若子群g不是群G的不变子群，H一般不构成群。

定义：上述群H叫作群G相对于不变子群g的商群。写为

$$H=G/g$$

§4 同构和同态

设有二个群，分别是G和$\overline{G}$。假定群G中的每一个元素a对应于群$\overline{G}$中的一个确定的元素$\bar{a}$，G中二个元素a和b乘积$a\cdot b$对应于群$\overline{G}$中相对应的元素$\bar{a}$和$\bar{b}$的乘积$\bar{a}\cdot\bar{b}$，而且群$\overline{G}$中的每一个元素至少对应于群G中的一个元素，那末就叫$\overline{G}$是群G

〔注〕 唯一的例外是单参数单群。

的"同态映象"。或者说，群G同态于群$\overline{G}$。

假使群G和群$\overline{G}$的元素是一一对应的，并且元素的乘积也一一对应。那末就称群G和群$\overline{G}$相互同构。相互同构的两个群只是表示元素的符号不同，而群的结构是完全相同的。

先举一个同态的例子。不难看出，若元素间的乘积定义为数的乘积，则整数1和 -1 构成一个2阶群。若令1对应于所有的偶置换，-1对应于所有的奇置换，则这个群是对称群S_n的同态映象。

不难看出，这个群与由

$$x \to x$$

$$x \to -x$$

二个变换构成的群是同构的。

可见，若群G同态于群H，H也同态于群G，则G、H二个群是同构的。同构一定同态，同态不一定同构。

可以证明：若任二同阶有限群是同态的，则必是同构的。反之，同构的有限群必是同阶的。

若群G和群$\overline{G}$并不同构，但是，$\overline{G}$是群G的同态映象。可以证明，群G中所有和群$\overline{G}$的单位元素对应的元素的集合构成群G中的一个不变子群g，它叫群G的同态核。

证：设G中的子集$g=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是同态核。即$f$将$G$中元素映射为$\overline{G}$中元素，且有

$f(a_i)=\overline{1}$ $(i=1,\cdots,n)$

即(Ⅰ)$f(a_ia_j)=f(a_i)f(a_j)=\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

所以$a_i.a_j\in g$ $(i, j=1, \cdots,n,)$

g对乘法封闭：

(Ⅱ)由于$1\cdot b=b$ $(1, b\in G)$

对应有$f(1)\cdot f(b)=f(1)\cdot b=b$

所以$f(1)=1$　　　　　　　　　　　　$1\in g$

(III)又由于$a_i a_i^{-1}=1$

对应有　$f(a_i)f(a_i^{-1})=\overline{1}\cdot f(a_i^{-1})=1$

所以$f(a_i^{-1})=1$　　　　　　　　　　$a_i^{-1}\in g$

由此可见g构成G的一个子群；

(IV)　由于在$\overline{G}$中有　$b\cdot 1=1\cdot b$。

对应于G中有　$b\cdot a_i=a_i\cdot b$　　$a_i\in g$

所以g是G中的不变子群。

可以看出，与群$\overline{G}$中某一个确定的元素相对应的群G中的所有元素的集合构成不变子群g的陪集。因此，$\overline{G}$中的元素和不变子群g的陪集一一对应。这就是说，群$\overline{G}$和商群G/g同构。这样我们就证明了如下的定理。

定理1.4.1　设群$\overline{G}$是群G的同态映象，那末群$\overline{G}$就同构于商群G/g，且G中的同态核g是不变子群。

例1　由偶置换形成的群$\overline{S}_n$是对称群S_n的不变子群，其相应的商群$\frac{S_n}{\overline{S}_n}$与由1和−1构成的二阶群同构。

例2　三维实正交群O_3同态于数群{1，−1}，同态核g是旋转群。商群O_3/g为{g，sg}与数群{1,−1}同构.其中s是空间反射变换。

§5　群的表示

同态概念一个重要特殊情况是：群G是由矢量空间R中的非奇异线性变换所形成的群。这就是说，群G中的每一个元素a和矢量空间R中的一个非奇异线性变换A相对应，而且元素的积ab和相应的非奇异线性变换的积AB相对应，我们

称这一组非奇异线性变换（或矩阵）是群G的“表示”。矢量空间的维数n称为表示的“维数”。假使这个非奇异线性变换群和群G的元素一一对应，那末表示就称为是一一的。假使表示不是一一的，那末这个非奇异线性变换一定是一个商群G/g的一一表示。其中g是群G的同态核。

由上可见，群的表示维数随着所取矢量空间的维数之不同而不同，且对某一抽象群的研究可以通过对该群的表示的研究来进行。

例 设标量场$\psi(\boldsymbol{x})$满足下述本征方程（三维标量场）。

$$H(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(\boldsymbol{x})=0 \tag{1.5.1}$$

式中$H(\boldsymbol{x})$是线性厄米微分算符。

假使$H(\boldsymbol{x})$在三维正交变换群G下保持不变，即

$$H(a\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x}) \qquad a\in G \tag{1.5.2}$$

现在来求群G的线性表示。

一般情况下，给定本征值ε，(1.5.1)方程有r个线性独立正交规一化的解。

$$\psi_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r) \quad r\text{是表示}r\text{重简并度} \tag{1.5.3}$$

$\psi_i(i=1,2,3,\cdots,r)$可作为r维线性函数空间中的基底。则满足(1.5.1)方程$\psi(\boldsymbol{x})$解可表为

$$\psi(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{r} b_i\psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{1.5.4}$$

设有一正交变换：　$a\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ (1.5.5)

$\psi(\boldsymbol{x})$满足$\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi(\boldsymbol{x})$。因(1.5.5)式，所以

$$\psi'(a\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}) \tag{1.5.6}$$

另，$\psi\ (\boldsymbol{x}')-\psi(\boldsymbol{x})=\psi'(\boldsymbol{x}')-\psi'(\boldsymbol{x})+\psi'(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})=0$

$\psi'(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})=\psi'(\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(a^{-1}\boldsymbol{x}')-\psi'(\boldsymbol{x}')$

$=\psi'(a^{-1}a\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(aa^{-1}\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')$.由

(1.5.6)式,$\psi'(a(a^{-1}\boldsymbol{x}))-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(a(a^{-1}\boldsymbol{x}))-\psi'(a\boldsymbol{x})$

$$=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})$$

最后可得
$$\psi'(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x}) \tag{1.5.7}$$

令
$$L(a)\psi(\boldsymbol{x})\equiv\psi'(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x}) \tag{1.5.8}$$

(1.5·8)式表明：对应任一正交变换$a\in G$，存在一个算符(线性变换）$L(a)$，它把变换后在$\boldsymbol{x}$点的标量函数值变为变换前标量函数在$a^{-1}\boldsymbol{x}$点上的值。

考虑
$$H(a^{-1}\boldsymbol{x})\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$=H(\boldsymbol{x})\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x})(L(a)\psi(\boldsymbol{x}))-$$
$$\varepsilon(L(a)\psi(\boldsymbol{x}))=0 \tag{1.5.9}$$

(1.5.9)式表明：$L(a)\psi(\boldsymbol{x})$是属于同一本征值ε的H的本征函数。

由(1.5.4)式
$$L(a)\psi(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{r}b_i\psi_i(a^{-1}\boldsymbol{x})$$

故对每一个正交变换$a\in G$一定对应于一个$L(a)$。不难证明，一组算符$L(a)$形成群G的一个表示。

设 $L(a_1)$、$L(a_2)$是二个算符，则

$$L(a_1)L(a_2)=L(a_1a_2)$$

因为
$$L(a_2)\psi(\boldsymbol{x})=\psi(a_2^{-1}\boldsymbol{x})={}^{(2)}\psi(\boldsymbol{x})$$
$$L(a_1)L(a_2)\psi(\boldsymbol{x})=L(a_1){}^{(2)}\psi(\boldsymbol{x})={}^{(2)}\psi(a_1^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$=\psi(a_2^{-1}a_1^{-1}\boldsymbol{x})=\psi((a_1a_2)^{-1}\boldsymbol{x})=L(a_1a_2)\psi(\boldsymbol{x})$$

因此，群G与函数空间中的线性变换算符$L(a)$同态，$L(a)$也是群G的一个线性表示。

这个例子说明了，由力学系统在某个变换群下的对称性（或不变性），可自然地得到变换群的表示。

§6 等价表示、不可约表示和可约表示

群表示论的基本问题是找出群的全部不可约不等价表示。这里就提出了二个重要的概念，即等价表示和不可约表示。物理学中，等价表示代表同一个量子态，基本粒子则对应于不可约表示。

若群G的二个表示 $D'(a)$、$D(a)$，满足

$$D'(a)=S^{-1}D(a)S \quad (\text{对所有} a\in G) \quad (1.6.1)$$

S是和群G元素无关的某一固定的非奇异矩阵，则说群G的这二个表示是等价的。

由线性代数知，等价表示可看作同一表示在不同的坐标系中的不同表达式。它们之间仅仅相差一个坐标相似变换。

综所上述，可把群G的全部表示分成若干不等价的表示类，每类中的表示相互等价。因此，寻求群的全部表示就是要找出全部不等价表示类。

可以从群的某一表示通过相似变换得到许多的等价表示。取（1.6.1）式两边矩阵的迹：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(D'(a))&=\mathrm{Tr}(S^{-1}D(a)S)=\mathrm{Tr}(D(a)SS^{-1})\\&=\mathrm{Tr}(D(a))\end{aligned}$$

可得结论，两表示等价的话，则它们迹必须相等。

如何判别任二表示等价或不等价，将在以后几节中谈到。

设在矢量空间R中的一组非奇异线性变换是群G的一个表示，假使有一个既非零矢量也非整个空间R的子空间r，它在表示群G的非奇异线性变换中变换为其自身，那末我们就称这个表示是可约的。称空间R对于群G是可约的。称子空

间r对于群G为不变的子空间。

为具体起见，选择一个坐标系，它的基矢是$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_n$，其中基矢$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$生成子空间$r$。那末显然有

$$A\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{u}_j P_{ji} \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

$$A\boldsymbol{u}_k = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{u}_j q_{jk} + \sum_{l=m+1}^{n} \boldsymbol{u}_l s_{lk}$$

$$k=m+1,\ m+2,\cdots,n \qquad (1.6.2)$$

其中，A是和群元素a相应的线性变换。在这个坐标系中，相应的矩阵具有如下形式

$$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

其中，P、Q、S是矩阵元p_{ji} q_{jk}，s_{lk}的矩阵，0是零矩阵。P可以看作一个群G在空间r中的一个表示。

当然，基矢$\boldsymbol{u}_{m+1}$，$\boldsymbol{u}_{m+2}$，$\cdots,\boldsymbol{u}_n$的选择有一定的任意性，假使适当地选择这些基矢，有可能使Q成为零矩阵，那末由基矢$\boldsymbol{u}_{m+1},\boldsymbol{u}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{u}_n$生成一个群$G$的不变子空间$r'$。在这种情况下，空间$R$分解成二个不变子空间，写作：

$$R=r\oplus r'$$

假使以符号D表示空间R中的一表示，以符号D_1、D_2分别表示空间r和空间r'中的表示。那末我们说，表示D分解为表示D_1和表示D_2的直和，写为

$$D=D_1\oplus D_2$$

则称表示D是完全可约的。也就是说这表示可以分解为准对角形式。

假使群G在空间R中有一表示，但是除了零矢量和空间

R自身以外，对于群G没有别的不变子空间，那末称这个表示是不可约的。也就是说这表示不可分解为准对角形式。

如何判定一个表示是可约的或是不可约的？以后在讲到群表示的特征标性质时将给我们提供一个很方便的判据而不必去寻求把它化为准对角矩阵的具体方法。

§7 群表示论中若干基本定理

定理1.7.1 有限群的每个等价表示类都包含一个么正表示。或者说，每一个有限维的表示等价于一个么正表示。

证：设有限群G有N个元素a_1，a_2，a_3，…，a_N。设D是群G的一个n维表示，相应矩阵元为A_1、A_2、…、A_N。我们定义任二个矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的标量积为

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(A_s\boldsymbol{y})_k^*\ (A_s\boldsymbol{x})_k=\sum_{i,j=1}^{n} y^*_i g_{ij}x_j$$

$$g_{ij}=\sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{(s)*}\quad a_{kj}^{(s)} \tag{1.7.1}$$

其中$(A_s\boldsymbol{x})_k$表示矢量$A_s\boldsymbol{x}$的第k个分量。$a_{kj}^{(s)}$是矩阵A_s的第k行第j列的矩阵元。显然，

$$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\rangle= \sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\ |(A_s\boldsymbol{x})_k|^2>0 \tag{1.7.2}$$

因此这个n维空间是一个酉空间。对任一给定的A_t，有

$$\langle A_t\boldsymbol{y}\mid A_t\boldsymbol{x}\rangle= \sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\quad (A_sA_t\boldsymbol{y})_k^*(A_sA_t\boldsymbol{x})_k$$

$$= \sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(A_s\boldsymbol{y})_k^*(A_s\boldsymbol{y})_k=\langle \boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{x}\rangle$$

由于当A_s跑遍A_1, A_2, A_3,…,A_N, A_sA_t也跑遍A_1、A_2,…,A_N。所以在这个空间中A_1,A_2,…,A_N都是么正线性变换。假使我们变换到一个正交归一化的坐标系，那末A_1,A_2,…,A_N就变换为么正矩阵。这就是说，有限群G的表示D是和一个么正表示等价的。由线性代数可知，假使有限群的一个表示是可约的，那末它一定是完全可约的。

对于连续群可以证明，任一紧致李群的表示等价于一个么正表示。

定理1.7.2(舒尔引理) 设群G有元素a_1,a_2,…,a_N,D是群G的一个不可约表示,相应的矩阵是A_1,A_2,…,A_N。假使有一个矩阵T，它和所有的矩阵A_i($i=1,2,\cdots,N$)相互对易，那末T一定是单位矩阵和某一个数的乘积。换言之，

$$A_iT=TA_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,N \tag{1.7.3}$$

那么就有

$$T=\lambda\cdot 1 \tag{1.7.4}$$

其中1表示单位矩阵，λ是一个数。

证：设相应于不可约表示D的空间为R。λ是T矩阵的一个本征值，那末所有和本征值λ相应的本征矢量形成一个子空间r。可以证明，对于群G不可约表示D来说，r是一个不变子空间。设v是r中任一矢量，有

$$Tv=\lambda v \tag{1.7.5}$$

由(1.7.3)和(1.7.4)可得

$$TA_iv=A_iTv=\lambda A_iv=\lambda(A_iv)$$
$$i=1,2,\cdots,N$$

可见A_iv也属于子空间r。但是表示D是不可约的，只有零矢量和R本身才是R的不变子空间。既然r不等同于零矢量，它只能等同于整个空间R。因此R中任一矢量v都满足

(1.7.5)。这样，我们证明了$T=\lambda\cdot 1$.

定理1.7.3（舒尔定理） 设群G有元素$a_1, a_2, \cdots, a_N$，它在n维空间R_n中有一个不可约表示D_n，其相应的矩阵是$A_1, A_2, \cdots, A_N$。在m维空间R_m中有一个不可约表示D_m，相应的矩阵是B_1，$B_2, \cdots, B_N$。设有一个n行m列的矩阵T，它满足

$$A_i T = T B_i \quad (i=1, 2, 3, \cdots, N) \qquad (1.7.6)$$

假使D_n和D_m不等价，则T一定是零矩阵。

证：（a）设$n>m$，$\boldsymbol{v}$是空间R_m中任一矢量。那末，

$$\mathbf{u}=T\boldsymbol{v} \qquad (1.7.7)$$

有n个分量，属于空间R_n中的一个矢量。可以证明，所有矢量$\boldsymbol{u}$构成空间R_n中的一个不变子空间r。因为

$$A_i\boldsymbol{u}=A_iT\boldsymbol{v}=TB_i\boldsymbol{v} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (1.7.8)$$

（$B_i\boldsymbol{v}$）属于空间R_m。因此T（$B_i\boldsymbol{v}$）属于子空间r。但是子空间r的维数不能大于m，因此r不可能等同于空间R_n。由于R_n是不可约的，它的仅有的不变子空间是零矢量和R_n本身。所以r只有零矢量。由（1.7.8）式可以看出，T必须是一个零矩阵。

（b）$n=m$，假使T是一个非奇异矩阵（$\det T \neq 0$），那末由（1.7.6）式得到

$$A_i=TB_iT^{-1} \qquad i=1, 2, \cdots, N \qquad (1.7.9)$$

此式表明D_n和D_m是等价的，这和定理的假设相矛盾，因此T矩阵一定是奇异的。即

$$\det T=0 \qquad (1.7.10)$$

由此可知空间r的维数一定小于n。

设$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$是空间$R_n$中的基矢，$e_1', e_2', \cdots, e_m'$是空间$R_m$中的基矢。那末空间$r$是由下列的矢量生成：

$$w_k = Te_k' = \sum_{l=1}^{n} e_l t_{lk} \quad k=1,2,\cdots,n \tag{1.7.11}$$

t_{lk}是矩阵T的矩阵元。显然，可以找到一组数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，使

$$\sum_{k=1}^{n} C_k w_k = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_l t_{lk} C_k = 0 \tag{1.7.12}$$

要使（1.7.12）成立，必要和充分条件是：

$$\sum_{k=1}^{n} t_{lk} C_k = 0 \quad l=1,\ 2,\ \cdots, n \tag{1.7.13}$$

由（1.7.10），方程组（1.7.13）一定存在一组非零解C_1、$C_2, \cdots, C_n$。这就证明了$w_1, w_2, \cdots, w_n$是线性相关的。因此由它所生成的空间r的维数一定小于n。由于r是R_n的不变子空间，而R_n又是不可再分。因此r只能是零矢量，所以T只能是零矩阵。

（c）$n<m$，显然所有满足条件

$$Tv = 0 \tag{1.7.14}$$

的矢量v形成空间R_m中的一个不变子空间r'。因为

$$TB_i v = A_i Tv = 0 \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{1.7.15}$$

显然空间r'不仅含有零矢量，设

$$v = \sum_{k=1}^{m} C_k e'_k \tag{1.7.16}$$

由条件（1.7.14），

$$Tv = T\sum_{k=1}^{m} C_k e_k' = \sum_{k=1}^{m} C_k T e'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} C_k \sum_{l=1}^{n} \mathbf{e}_l T_{lk} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (T_{lk} C_k \mathbf{e}_l) = 0$$

可得
$$\sum_{k=1}^{m} T_{lk} C_k = 0 \quad (l=1,2,\cdots,n) \tag{1.7.17}$$

由于变数C_k的数目大于方程的数目，所以一定有一个非零解。既然r'是R_m的一个不变子空间，R_m是不可约的，而r'又不等同于零矢量。可见，r'一定等同于整个空间R_m。因此T作用在空间R_m中所有的矢量上都得到零矢量，可见T一定是零矩阵。

定理1.7.4 设G是一个有限群，有元素a_1、a_2、…、a_N。设D_n是一个n维的不可约么正表示，相应的矩阵$A^{(1)}$、$A^{(2)}$、…、$A^{(2)}$。$A^{(\mu)}$的矩阵元是

$$a_{ip}^{(\mu)} \quad i, p = 1, 2, \cdots, n \tag{1.7.18}$$

则
$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} a_{ip}^{(\mu)*} a_{kq}^{(\mu)} = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{pq} \tag{1.7.19}$$

证：令B是任一n维的矩阵。可以证明矩阵

$$P = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} A^{(\mu)} B A^{(\mu)-1} \tag{1.7.20}$$

和所有的矩阵$A^{(\nu)}$可以相互对易。

$$A^{(\nu)}P = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} A^{(\nu)}(A^{(\mu)}B(A^{(\mu)})^{-1})$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} A^{(\nu)}A^{(\mu)}B(A^{(\mu)})^{-1}(A^{(\nu)})^{-1}A^{(\nu)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}(A^{(\nu)}A^{(\mu)})B(A^{(\nu)}A^{(\mu)})^{-1}A^{(\nu)}$$

当 μ 跑遍所有 的群元素，$A^{(\nu)}A^{(\mu)}$ 显然也跑遍表示 D_n 中所有的矩阵。因此有

$$A^{(\nu)}P=PA^{(\nu)} \qquad V=1,2,\cdots,N \tag{1.7.21}$$

据定理1.7.2，可知P一定是单位矩阵的倍数，即

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\mu)}B(A^{(\mu)})^{-1}=\lambda(B)\cdot 1 \tag{1.7.22}$$

其中数 λ 当然依赖于矩阵B的具体形式。由表示的么正性，把上式写作

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\mu)}B[A^{(\mu)}]^{+}=\lambda(B)\cdot 1 \tag{1.7.23}$$

写成矩阵元形式，即

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{n}a_{ij}{}^{(\mu)}B_{jl}a_{kl}^{(\mu)*}=\lambda(B)\delta_{ik} \tag{1.7.24}$$

为了求出$\lambda(B)$，令（1.7.24）式中$k=i$，并对 i 求和。可得

$$n\lambda(B)=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j,l=1}^{n}a^{(\mu)}{}_{ij}B_{jl}a_{il}{}^{(\mu)*})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(\mu)}a^{(\mu)*}{}_{il})B_{jl}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{\mu}B_{jl}\delta^{(\mu)}{}_{jl}=\sum_{l=1}^{n}B_{ll} \tag{1.7.25}$$

令 $B_{jl}=\delta_{jp}\delta_{lq}$

那末 $$n\cdot\lambda(B)=\sum_{l=1}^{n}\delta_{lp}\delta_{lq}=\delta_{pq} \tag{1.7.26}$$

由（1.7.24）

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} a^{(\mu)}{}_{il}\delta_{jp}\delta_{lq}a^{(\mu)}{}_{kl}{}^{*}=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} a_{ip}{}^{(\mu)}a_{kq}{}^{(\mu)*}$$

$$=\frac{1}{n}\delta_{pq}\delta_{ik} \tag{1.7.27}$$

定理1.7.5 设G是一个有限群，有元素$a_1, a_2, \cdots, a_N$，设D_n和D_m是二个不等价不可约么正表示。表示D_n是n维的，矩阵是$A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(N)}$。$A^{(\mu)}$的矩阵元是

$$a^{(\mu)}_{ik} \quad i,\ k=1,2,\cdots,n,\ \mu=1,\ 2,\cdots,N \tag{1.7.28}$$

表示D_m是m维的，矩阵是$C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(N)}$。$C^{(\mu)}$的矩阵元是

$$C_{jl}{}^{(\mu)} \quad j,\ l=1,\ 2,\cdots,m \tag{1.7.29}$$

则有 $$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} C^{(\mu)}{}_{jl}{}^{*}a^{(\mu)}{}_{ik}=0 \tag{1.7.30}$$

证：令B是一个n行m列矩阵，那末

$$P=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\mu)}B\,(C^{(\mu)})^{-1} \tag{1.7.31}$$

满足 $$A^{(\nu)}P=PC^{(\nu)} \qquad \nu=1,\ 2,\cdots,N \tag{1.7.32}$$

因为 $$A^{(\nu)}P=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\nu)}A^{(\mu)}B(C^{(\mu)})^{-1}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\nu)}A^{(\mu)}B(C^{(\mu)})^{-1}(C^{(\nu)})^{-1}(C^{(\nu)})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\nu)}A^{(\mu)}B(C^{(\nu)}C^{(\mu)})^{-1}C^{(\nu)}=PC^{(\nu)} \quad (1.7.33)$$

据定理1.7.3，P一定是一个零矩阵。因此有

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}A^{(\mu)}B(C^{(\mu)})^{-1}=0 \quad (1.7.34)$$

上式可以写成

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}a_{ik}{}'^{(\mu)}B_{k}{}'_{l}{}'C_{ll}{}'^{(\mu)*}=0 \quad (1.7.35)$$

设 $B_{k}{}'_{l}{}'=\delta_{k}{}'_{k}\delta_{l}{}'_{l}$ (1.7.36)

那末就有 $\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}a_{ik}{}^{(\mu)}c_{ll}{}^{(\mu)*}=0$ 即证。

我们可以将 $a_{ik}{}^{(\mu)}$ $(\mu=1,2,\cdots,N)$ (1.7.37)
看作一个N维空间中的矢量的分量。由（1.7.19）式可知，不可约的么正表示D_n给出了n^2个相互正交的矢量。由于它们的正交性，所以是线性无关的。因为在一个N维的空间中，最多只能有N个线性无关的矢量，以后将证明：$n^2=N$。

假使有q个不等价不可约表示D_{np}（$p=1,2,\cdots,q$），它们总共给出 $\sum_{P=1}^{q}n_p^2$ 个相互正交的矢量。以后将证明：

$$\sum_{P=1}^{q}n^2_p=N \quad (1.7.38)$$

由此可得：

定理（1.7.6）（完备性定理）任一N维空间中的矢量可以由所有的不等价不可约表示的矩阵元

$$T_{\alpha\beta}^{(p)} \qquad p=1,2,3,\cdots,q, \quad \alpha,\beta=1,2,\cdots,n_p \quad (1.7.39)$$

所构成的N个N维矢量的叠加来表示。换言之，对N维空间中的任一矢量X，有

$$X(x_1,x_2,\cdots,x_N)= \sum_{p=1}^{q} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_p} C^{(p)}{}_{\alpha\beta} T^{(p)}{}_{\alpha\beta}$$

(1.7.40)

其中$C^{(p)}{}_{\alpha\beta}$是常数因子。

定义：设$D(g)$是群G的表示矩阵，其中$g\in G$，则$\chi(g)\equiv T_r D(g)=\sum_{\mu} D_{\mu\mu}(g)$叫作表示的特征标。

定理1.7.7 设有限群G有元素$a_1,a_2,\cdots,a_N$。它有二个n维的不等价不可约表示$D^{(p)}$和$D^{(q)}$，则它们的特征标相互正交。

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} \chi^{(q)*}_{(a_\mu)} \chi^{(p)}_{(a_\mu)} = \delta_{pq} \qquad (1.7.41)$$

证：由定理（1.7.4）和（1.7.5）有

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N} a^{(q)}{}_{il}^{*}(\mu) a^{(p)}{}_{kh}(\mu) = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{lh}\delta_{pq}$$

令$i=l$、$k=h$，并对i、k求和得

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^{(q)*}_{ii}(\mu)\, a^{(p)}_{kk}(\mu)$$

$$=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{ik}\delta_{pq}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}{}^{(q)*}(\mu)\sum_{k=1}^{n} a_{kk}{}^{(p)}(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ii}\delta_{pq}$$

$$= \frac{n}{n} \delta_{pq}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{n} \chi^{(q)*}_{(\alpha_\mu)} \chi^{(p)}_{(\alpha_\mu)} = \delta_{pq}$$

知道了某一个表示的特征标 $\chi_{(\alpha\mu)}$，那末由（1.7.41）式就可以判断表示是否是可约的。设同时知道各个不可约表示的特征标 $\chi^{(q)}_{(\alpha_\mu)}$，那末用(1.7.41)式也可求得某一表示中含有各种不可约表示的次数。设某一表示含有不可约表示 $D^{(p)}$、m_p次。有

$$\chi_\mu = \sum_{p=1}^{q} m_p \chi^{(p)}_\mu \qquad\qquad \chi_\mu \equiv \chi^{(\alpha_\mu)}$$

由（1.7.41）式，得

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} \chi^{(q)*}_\mu \chi_\mu = m_p \qquad (1.7.42)$$

由上式可得结论：假使二个表示的特征标相同，那末它们一定是等价的。由（1.7.41）式，又可得

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} \chi^*_\mu \chi_\mu = \sum_p m_p^2 \qquad (1.7.43)$$

此式是判断某一个表示是否是可约的一个工具。具体来说，当 $\sum_p m_p^2 = 1$，则此表示是不可约的。当 $\sum_p m_p^2 > 1$，则此表示是可约的。

设c和a是相互共轭的二个元素，即$c = bab^{-1}$

则相应的表示之间应存在关系$D_c = D_b D_a D_b^{-1}$，故

$$\mathrm{Tr}(D_c) = \mathrm{Tr}(D_b D_a D_b^{-1}) = \mathrm{Tr}(D_a D_b^{-1} D_b) = \mathrm{Tr} D_a$$

这意味着任一表示中，同一类中的元素的特征标是相等的。也可以说，特征标是类的函数。可证所有类的函数都可展开为不可约表示的特征标的叠加。

设矢量$\mathbf{y}=\{y_\mu\}$是类的函数。即当$a_\mu=a_\rho a_\nu a_\rho^{-1}$，有$y_\mu=y_\nu$。

$$则\quad y_\mu=\sum_{p=1}^{q}C_p\chi_\mu^{(p)} \tag{1.7.44}$$

证：由（1.7.40）式，

$$y_\mu=\sum_{p=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n_p}\sum_{\beta=1}^{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}T_{\alpha\beta}^{(p)}(a_\mu)$$

$$y_\mu=y_\nu=\sum_{p=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n_p}\sum_{\beta=1}^{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}T_{\alpha\beta}^{(p)}(a_\rho a_\nu a_\rho^{-1})$$

$$=\sum_{p=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n_p}\sum_{\beta=1}^{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}\sum_{\gamma,\delta=1}^{n_p}T_{\alpha\gamma}^{(p)}(a_\rho)T_{\gamma\delta}^{(p)}(a_\nu)$$

$$\times T_{\beta\delta}^{(p)*}(a_\rho)=\sum_{p=1}^{q}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}T_{\gamma\delta}^{(q)}(a_\nu)$$

$$\times\frac{1}{n_p}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}=\sum_{p=1}^{q}\sum_{\alpha,\gamma=1}^{n_p}\frac{1}{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}T_{\gamma\gamma}^{(p)}(a_\nu)$$

令$\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n_p}\frac{1}{n_p}C_{\alpha\beta}^{(p)}=C_p$，所以$\displaystyle y_\mu=y_\nu=\sum_{p=1}^{q}C_p\chi_\nu^{(p)}$

上面推导中用了定理（1.7.4）.

设群元素可以分成s类，那末$\mathbf{y}$作为类的函数，只有s个线性无关的分量。因此这些矢量构成一个s维子空间。$\chi^{(p)}$（$p=1,2,\cdots,q$）是相应于子空间中q个线性无关的矢量。由

于子空间内的所有矢量y都能表为$\chi^{(p)}$的叠加，必须有$q=s$。因此得到如下定理。

定理1.7.8　一个群的不等价、不可约表示的个数等共轭元素类的个数。

令a_1，a_2，…，a_m是m个不相互共轭的元素。设和a_ν相互共轭的元素包括a_ν自己在内，一共有ρ_ν个。引进符号

$$f_\nu^{(q)}=\sqrt{\frac{\rho_\nu}{N}}\chi_\nu^{(q)} \tag{1.7.45}$$

其中N是群的阶。则（1.7.41）式就可以写成：

$$\sum_{\nu=1}^{m} f_\nu^{(q)*}f_\nu^{(p)}=\delta_{pq} \tag{1.7.46}$$

也可以写成：

$$\sum_{q=1}^{q_0} f_\mu^{(q)*}f_\nu^{(q)}=\sqrt{\frac{\rho_\mu\rho_\nu}{N^2}}\sum_{q=1}^{q_0}\chi_\mu^{(q)*}\chi_\nu^{(q)}=\delta_{\mu\nu}$$

$$\sum_{q=1}^{q_0}\chi_\mu^{(q)*}\chi_\nu^{(q)}=\frac{N}{\rho_\mu}\delta_{\mu\nu} \tag{1.7.47}$$

设G是一个N阶的有限群，有元素a_1、a_2、a_3、…、a_N。设X（x_1、x_2、…、x_N）是一个N维空间R_N中任一矢量。引进表式

$$\mathrm{X}=\sum_{\mu=1}^{N}x_\mu a_\mu \tag{1.7.48}$$

定义

$$a_\nu\mathrm{X}=\sum_{\mu=1}^{N}x_\mu a_\nu a_\mu=\sum_{\mu=1}^{N}y_\mu a_\mu \tag{1.7.49}$$

因当a_μ跑遍所有的群元素，那末$a_\nu a_\mu$也跑遍所有的群元素。可把矢量$\boldsymbol{y}$（$y_1, y_2, \cdots, y_N$）当作矢量$\mathbf{X}$的一个映象。可写成

$$\boldsymbol{y}=A^{(\nu)}\mathbf{X} \tag{1.7.50}$$

$A^{(\nu)}$表示产生这个映象的数学变换。因为

$$A^{(\nu)}(\mathbf{X}^{(1)}+\mathbf{X}^{(2)})=A^{(\nu)}\mathbf{X}^{(1)}+A^{(\nu)}\mathbf{X}^{(2)}$$

所以变换$A^{(\nu)}$是线性的。可以证明，假使有$a_\nu a_\mu=a_w$ (1.7.51)

那末相应地有
$$A^{(\nu)}A^{(\mu)}=A^{(w)} \tag{1.7.52}$$

因此变换$A^{(\nu)}$是群G的一个N维表示，叫作正则表示。

由定义，正则表示的特征标除$\chi(e)=N$（e是群的单位元素）外其它群元素的特征标均为0。

设
$$\overset{正则}{\chi_\mu}=\sum_{p=1}^{q_0} m_p \chi_\mu^{(p)}$$

由（1.7.42）式
$$m_p=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\chi_\mu^{(q)*}\chi_\mu^{正则}$$

因$\chi(e)=N$和$\chi(a_i)=0$（$a_i\neq e$），得

$$m_p=\frac{1}{N}\chi_e^{(q)*}\overset{正则}{\chi e}=\frac{1}{N}\chi_e^{(q)*}N=\chi_e^{(q)*}=n_q \tag{1.7.53}$$

由上式看出，正则表示内，一个不可约表示出现的次数等于它的维数。因此得到结论是：正则表示包含所有的不等价不可约表示。

由
$$\overset{正则}{\chi_\mu}=\sum_{p=1}^{q_0} m_p \chi_\mu^{(p)}$$

取$\mu=e$，则得到
$$N=\sum_{p=1}^{q_0} m_p\cdot\chi_e^{(p)}=\sum_{p=1}^{q_0} m_p\cdot n_p=\sum n_p^2 \tag{1.7.54}$$

其中用了（1.7.53）式。（1.7.54）式就是（1.7.38）式，或下面的定理。

定理1.7.9（勃恩密特定理） 所有的不等价不可约表示的维数平方和等于群的阶。

§8 矩阵的直积

为了以后讨论方便，现在介绍关于矩阵的直积定义及其性质。

设有n维矩阵A和m维矩阵B[注]，相应的矩阵元是 a_{ij}和b_{kl}。我们称矩阵C是A和B的直积，记作：

$$C=A\otimes B \qquad 或 \qquad B\otimes A$$

$$C=A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B, & a_{12}B, \cdots, a_{1n}B \\ a_{21}B, & a_{22}B, \cdots, a_{2n}B \\ & \vdots \\ a_{n1}B, & a_{n2}B, \cdots, a_{nn}B \end{pmatrix}$$

$$C=B\otimes A=\begin{pmatrix} b_{11}A, & b_{12}A, \cdots, b_{1m}A \\ b_{21}A, & b_{22}A, \cdots, b_{2m}A \\ \vdots & \\ b_{m1}A, & b_{m2}A, \cdots, b_{mn}\ A \end{pmatrix}$$

下面不作证明，矩阵的直积的主要性质列举如下。

1. $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$，$A$、$C$是$n$维矩阵，$B$、$D$是$m$维矩阵。
2. $\mathrm{Tr}(A\otimes B)=\mathrm{Tr}A\,\mathrm{Tr}B$
3. $(A\oplus B)\otimes C=A\otimes C\oplus B\otimes C$
4. $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$
5. $(A\otimes B)^{\dagger}=A^{\dagger}\otimes B^{\dagger}$

注：A，B不一定是方阵。

定理1.8.1 设D_1和D_2分别是群G的n和m维的 二 个 表示，则$D=D_1\otimes D_2$也是群G的$n\times m$维的表示（留作习题）。当然$D=D_2\otimes D_1$也是群G的一个表示，因为$\mathrm{Tr}(A\otimes B)=\mathrm{Tr}(B\otimes A)$，所以$D_1\otimes D_2$和$D_2\otimes D_1$ 这两表示是等价的。

参 考 文 献

(1)斯米尔诺夫：《高等数学教程》 Ⅱ卷1分册.

(2)布洛欣采夫：《量子力学原理》。

(3)P. Romm ：《*Advanced Quantum theory*》.

(4)C. MφLLer ：《*The Theory of Relativity*》

(5)B. L. Vander Waerden ：《*Group Theory and Quantum Mechanics*》.

第二章　李　群

迄今为止，我们讨论了群论的一般概念和有限群的一些性质，物理学中常遇到的群多是由不可数的无穷多元素组成的连续群，特别是其中的李群。

§1　李群的定义

若变换群G的每个群元由p个独立无关的实参量表征，即

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \tag{2.1.1}$$

或简写为　$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$　$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$

则此变换群称为p个参量的变换群。

当函数f是x和α的C^∞阶连续函数时，则称上述变换是连续变换群。因此，群条件加上连续性条件即定义了连续群。它满足以下条件。

（Ⅰ）　若$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$　　$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$　　$\boldsymbol{x}'' = f(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\beta})$

则

$$\boldsymbol{x}'' = f[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}); \boldsymbol{\beta}] = f[\boldsymbol{x}; \varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})] = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{2.1.2}$$

即　$\boldsymbol{\gamma} = \varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \gamma_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$　　(2.1.3)

φ应是一个实变函数，它决定了群的运算。

（Ⅱ）　$f(\boldsymbol{x}, \alpha_0) = \boldsymbol{x}$　　$\alpha_0 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$

$$\tag{2.1.4}$$

$f(x\alpha_0)$是单位群元。

(III) $\varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^{-1})=\boldsymbol{\alpha}_0=\varphi(\boldsymbol{\alpha}^{-1}, \boldsymbol{\alpha})$

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1}\in\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \qquad (2.1.5)$$

(IV)满足结合律: $\varphi[\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})]=\varphi[\varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\gamma}]$

$$(2.1.5)$$

若连续群满足条件:

(1)$\boldsymbol{\gamma}=\varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$是$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$的C^∞阶连续函数。

(2)$\boldsymbol{\alpha}^{-1}$是$\boldsymbol{\alpha}$的C^∞阶连续函数。

则称此连续群是p阶李群。

例1 伸缩变换群 $x'=\alpha x\ (\alpha\neq 0)$

单位元素是$\alpha_0=1$，逆元素是$\alpha^{-1}=1/\alpha$,相应的群运算$\gamma=\varphi(\beta, \alpha)$是数的乘法$\beta\alpha$。这是一个一阶阿贝尔李群。

例2 平移群 $x'=x+\alpha$

单位元素是$\alpha_0=0$，逆元素是$\alpha^{-1}=-\alpha$,相应的群运算$\gamma=\varphi(\alpha, \beta)$是数的加法$\alpha+\beta$。这也是一个一阶阿贝尔李群。

例3 一般二维实线性变换群$GL(2, k)$、

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$$

群元是 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$ $\det A\neq 0$

单位元素是 $A_0=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 逆元素是A^{-1}

群的运算是矩阵乘法 $C=A\cdot B$。这是四阶非阿贝尔李群。

例4 特殊线性群$SL(2,R)$，它是由一般二维实线性

变换群$GL(2,R)$加上$\det A=1$的幺模条件所构成的群。

例5 n维复幺正变换群$U(n, c)$，它是由满足幺正条件$U^{\dagger}U=1$所有的矩阵集合所构成的群，这是一个含n^2个独立参量的非阿贝尔李群。

例6 转动群$R(n)$，它是由满足$\tilde{A}A=1$的所有的矩阵的集合所构成的群，这是一个含$n(n-1)/2$个独立参量的非阿贝尔李群。

例7 幺正幺模群$SU(n,c)$，它是由满足幺正条件$U^{\dagger}U=1$和幺模条件$\det U=1$的所有的n维复矩阵的集合所构成的群，显然它的独立参量是n^2-1个。

例8 洛仑兹群是一个复4维正交群，它是一个6阶李群。

连通群：任取连续群的一个元素$g(\alpha)$，若令α连续变化至α_0，则$g(\alpha)$经过群元素连续变化至单位元素$e(\alpha_0)$，那末就说这个连续群是连通的。可见连通群中任二元素均可通过参量的连续变化而重合。正交群$O(3)$不是连通群，但旋转群$R(3)$却是连通群。

紧致群：若群元素的任一无穷序列的极限元素也是群元素，则此群是紧致的。关于"紧致"这里仅给出定义，不作详细讨论。它涉及到一个群的整体性质，在一定意义上说，一个紧致群的参数空间的体积元是有限的闭集。三维正交群和旋转群是紧致群。洛仑兹群不是紧致群。

§2 无穷小变换或生成元

有限变换是由许许多多的无穷小变换累加的结果。苏福斯·李的连续群理论的基本思想是通过无穷小变换去研究整个群的性质。

设连续群的某个线性表示为

$$x'_i=f_i(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\alpha}) \tag{2.2.1}$$

或

$$[x'_i]=D(\alpha)[x_i] \tag{2.2.2}$$

设 $\alpha=0$相应于恒等变换，则有

$$f_i(\mathbf{x},\ 0)=x_i \tag{2.2.3}$$

$$D(\alpha=0)=I \tag{2.2.4}$$

因此无穷小变换是

$$x_i+dx_i=f_i(\mathbf{x},\ \delta\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.2.5}$$

或

$$[x_i+dx_i]=D(\delta\boldsymbol{\alpha})[x_i] \tag{2.2.6}$$

显然

$$dx_i=\left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha_k=u_{ik}(\mathbf{x})\cdot\delta\alpha_k$$

$$u_{ik}(0\mathbf{x})\equiv\left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,n\\ k=1,2,\cdots,r\end{matrix} \tag{2.2.7}$$

共有$n\times r$个线性无关的u_{ik}。

写为矩阵形式

$$[dx_i]=\left.\frac{\partial D(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha_k[x_i] \tag{2.2.8}$$

式中

$$\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0}=I_k \tag{2.2.9}$$

不含参量，是一个仅由群表示所决定的数量矩阵。这就是无穷小变换算符（或称群的生成元）的矩阵形式。

设某一个函数$\psi(\mathbf{x})$，当$\mathbf{x}$作一无穷小变换，函数$\psi(\mathbf{x})$的相应变换为

$$d\psi(\mathbf{x})=\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_i}dx_i=\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_i}u_{ik}(\mathbf{x})\delta\alpha_k$$

$$=\delta\alpha_k[u_{ik}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i}]\psi(\boldsymbol{x})$$

所以 $$d\psi(\boldsymbol{x})=\delta\alpha_k I_k\psi(\boldsymbol{x})$$

式中 $$I_k\equiv u_{ik}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.2.10)$$

叫作群的无穷小变换算符或群的生成元的微分形式。这是一个由群性质所决定的算符。共有r个线性无关的无穷小变换算符或群的生成元。

显然连续变换群（2.2.2）的矩阵的无穷小表示是

$$D=I+\delta\alpha_k I_k \qquad (2.2.11)$$

其中I_k就是（2.2.9）式。

由群运算得

$$D_aD_b=(1+\delta\alpha_iI_i)(1+\delta\alpha_kI_k)=1+\delta\alpha_iI_i+\delta\alpha_kI_k+\delta\alpha_i\delta\alpha_kI_iI_k \qquad (2.2.12)$$

所以 $$D_aD_b-D_bD_a=\delta\alpha_i\delta\alpha_k(I_iI_k-I_kI_i)$$

可见忽略二阶无穷小量时，无穷小变换群都是可对易的。因此群是否是阿贝尔群只能根据二阶无穷小量才能判定。对于阿贝尔群，它的全部生成元都是可对易的。

例1 $GL(2,R)$群

$$x_1'=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\quad x_2'=\alpha_3x_1+\alpha_4x_4 \quad 或\quad \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

由（2.2.7)和（2.2.9）式可得无穷小变换算符：

$$I_1=x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\quad I_2=x_2\frac{\partial}{\partial x_2},\quad I_3=x_3\frac{\partial}{\partial x_3},\quad I_4=x_4\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

或

$$I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ I_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}。$$

$U(n)$群和$SU(n)$群是量子论中的对称变换群。可以证明，每个这样的群必对应一个守恒量(量子数)。

如前所述，$U(n)$群和$SU(n)$群的区别在于前者的矩阵行列式是$e^{i\theta}$，后者的矩阵行列式是1。因此$SU(n)$群是把$U(n)$群中的所有相变换$U=e^{i\theta}.1$去掉后的一个子群[注]。§2.1节曾讲到$U(n)$群和$SU(n)$群的阶分别是n^2和(n^2-1)。因此相应地$U(n)$群和$SU(n)$群的线性无关的生成元的个数分别是n^2个和n^2-1个。

例2 $U(n)$群的无穷小变换是:

$$U=1+\delta\alpha_k I_k=1+i\delta\alpha_k H_k=e^{i\delta\alpha_k H_k}$$

其中 $H_k\equiv -iI_k$(或$I_k=iH_k$)。以H_k代替I_k是因为H_k是一个厄米算符。量子力学中，厄米算符的本征值全是实数，一切可测量的物理量只能用厄米算符来表示。按诺特定理，一力学系统若把$U(n)$(或$SU(n)$)群作为对称变换群，则必存在一相应的守恒量，此量就是上述厄米算符的本征值。

由U的么正性得

$$U^\dagger U=1=(1-i\delta\alpha_k H^\dagger_k)(1+i\delta\alpha_k H_k)=1+i\delta\alpha_k(H^\dagger-H)+O(\delta\alpha^2)$$

所以
$$H^\dagger=H$$

厄米算符H的矩阵表示为

$$H_K=-i\frac{\partial U(\alpha)}{\partial\alpha_k}\bigg|_{\alpha=0}$$

〔注〕 $U_n=I+\delta\alpha_k I_k$，从$U(n)$群中单纯去掉相变换后的集合并不构成群。要构成一个群尚须去掉由相变换生成元和非相变换生成元一起所生成的变换，这正是$SU(n)$群。

由这样得到的n^2个H_k中，去掉相当于无穷小相变换的$H_k=I\times\text{const}$，就可得到$SU(n)$群的(n^2-1)个厄米矩阵。

以$U(2)$群和$SU(2)$群为例：

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，么正变换：

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad U^{-1}=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

其中 $\triangle\equiv ad-bc=\pm e^{i\theta}$

由么正性条件$U^*=U^{-1}$可得 $a^*=d/\triangle, c^*=-b/\triangle$, $b^*=-c/\triangle$，$d^*=a/\triangle$或$c=-\triangle b^*=\mp e^{i\theta}b^*$，$d=\triangle a^*=\pm e^{i\theta}a^*$.

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ \mp e^{i\theta}b^* & \pm e^{i\theta}a^* \end{pmatrix}$$

由(2.2.9)式可得$U(2)$群的4个无穷小变换算符（生成元）是：

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm e^{i\theta} \end{pmatrix}\quad I_2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \mp ie^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$I_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\quad I_4=\begin{pmatrix} 0 & i \\ \pm ie^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

加上么模条件$|\triangle|=1$。就得到：

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad I_2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$I_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\quad I_4=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

由$H_k=-iI_k$，可得

$$H_1=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\qquad H_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_3=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\qquad H_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉与相变换相应的无穷小变换算符 I_1 或 H_1，可以得到 $SU(2)$ 群的3个无穷小变换算符。它们就是著名的泡利矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

由此看出，$U(2)$ 群的4个无穷小变换算符的迹 $\mathrm{Tr}H_k(k=1,2,3,4)$ 不一定全为0。$SU(2)$ 群的 3 个无穷小变换算符的迹 $\mathrm{Tr}\sigma_i(i=1,2,3)$ 全为0。

一般可证．李群的表示的么模条件等价于无穷小变换算符（矩阵)的迹是0。

证：　$D=1+\varepsilon^a I_a$，所以 $\det D\cong I+(\varepsilon^a I_a)_{ii}$（对 i 求和）。

因　$(\varepsilon^a I_a)_{ii}=\varepsilon^a(I_a)_{ii}$，所以 $\det D\approx I+\varepsilon^a(I_a)_{ii}$。

由么模条件　$\det D=1$，可得　$\varepsilon^a(I_a)_{ii}=0$。

由 ε^a 的任意性有　$(I\alpha)_{ii}=\mathrm{Tr}I_a=0$（对任一 α）。

由于逆论证也成立，故二者等价。

以 $R(n)$ 群为例。$R(n)$ 是 $U(n)$ 的特例。设无穷小变换 $R=1+\varepsilon$，要满足 $\tilde{R}\cdot R=1$，所以 $\tilde{R}\cdot R=(1+\tilde{\varepsilon})\cdot(1+\varepsilon)\simeq 1+\varepsilon+\tilde{\varepsilon}$。

取分量得　$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$

因此无穷小变换矩阵是一个 n 维反对称矩阵。含有 $n(n-1)/2$ 个参量。

以三维转动群为例，它含有3个独立参量，ε 可写成：

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&\gamma&-\beta\\-\gamma&0&\alpha\\\beta&-\alpha&0\end{pmatrix}$$

则无穷小变换　$dx=0+\gamma y-\beta z$

$$dy=-\gamma x+0+\alpha z$$
$$dz=\beta x-\alpha y+0$$

三维转动群的生成元是

$$U_{ih}=\partial f_i/\partial \alpha_h\Big|_{\alpha=0}$$

$$u_{31}=-y,\ u_{32}=x,\ u_{33}=0;\ u_{21}=z,\ u_{22}=0,$$
$$u_{23}=-x;\ u_{11}=0,\ u_{12}=-z,\ u_{13}=+y。$$

所以 $$I_h=u_{ih}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$I_1=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}$$

$$I_2=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}$$

$$I_3=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.$$

相应矩阵形式是:

$$I_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$I_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

或 $$H_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad H_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$$

$$H_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当力学系统把三维转动群$R(3)$作为对称变换群时，H_1、H_2、H_3即是守恒的角动量算符。通常以J_1、J_2、J_3表示之。

洛仑兹群可看作闵可夫斯基时空$(x_1, x_2, x_3, x_4(it))$内的正交变换。有六个独立参量。因此

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta & i\delta \\ -\gamma & 0 & \alpha & i\tau \\ \beta & -\alpha & 0 & i\rho \\ -i\delta & -i\tau & -i\rho & 0 \end{pmatrix}$$

则无穷小变换

$$dx_1 = 0 + \gamma x_2 - \beta_1 x_3 + i\delta x_4$$
$$dx_2 = -\gamma x_1 + 0 + \alpha x_3 + i\tau x_4$$
$$dx_3 = \beta x_1 - \alpha x_2 + 0 + i\rho x_4$$
$$dx_4 = -i\delta x_1 - i\tau x_2 - i\rho x_3 + 0$$

生成元是

$u_{11}=0,\ u_{12}=-x_3,\ u_{13}=x_2,\ u_{14}=ix_4, u_{15}=0, u_{16}=0,$

$u_{21}=x_3,\ u_{22}=0,\ u_{23}=-x_1, u_{24}=0, u_{25}=ix_4, u_{26}=0,$

$u_{31}=-x_2,\ u_{32}=x_1, u_{33}=0, u_{34}=0, u_{35}=0,\ u_{36}=+ix_4,$

$u_{41}=0, u_{42}=0, u_{43}=0, u_{44}=-ix_1, u_{45}=-ix_2, u_{46}=-ix_3.$

所以$I_1 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$　　$I_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}$

$$I_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$I_4 = i\left(-x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = i\left(x_4\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

$$I_5 = i\left(-x_2\frac{\partial}{\partial x_4} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = i\left(x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

$$I_6=i\left(-x_3\frac{\partial}{\partial x_4}+x_4\frac{\partial}{\partial x_3}\right)=i\left(x_4\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

相应的矩阵形式：

$$I_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad I_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$I_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$I_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}\qquad I_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix}$$

§3 结构常数

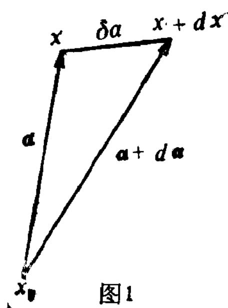


图1

由(2.2.5)式知无穷小变换是：

$$x_i+dx_i=f_i(\boldsymbol{x},\ \delta\boldsymbol{\alpha})$$

一定可以找到一非恒等变换。

令 $\quad x_i=f_i(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\alpha}) \qquad (2.3.1)$

由图1知 $\quad x_i+dx_i=f_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\alpha}+d\boldsymbol{\alpha})$

$$(2.3.2)$$

由(2.3.1)、(2.2.5)式及群运算的要求，得：

$$x_i+dx_i=f_i(\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{\alpha})=f_i[f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\alpha}),\delta\boldsymbol{\alpha}]=f_i[\boldsymbol{x}_0,\ \varphi(\boldsymbol{\alpha},\delta\boldsymbol{\alpha})]$$
$$=f_i(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\alpha}+d\boldsymbol{\alpha}).$$

可见$\boldsymbol{\alpha}+d\boldsymbol{\alpha}=\varphi(\boldsymbol{\alpha},\delta\boldsymbol{\alpha})$。一般来说，$d\boldsymbol{\alpha}=\delta\boldsymbol{\alpha}$，$\delta\boldsymbol{\alpha}$ 实际上相当于$\boldsymbol{\beta}$。

$\varphi(\boldsymbol{\alpha},\delta\boldsymbol{\alpha})$ 在$\boldsymbol{\alpha}$附近作泰勒展开得：

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha},\delta\boldsymbol{\alpha})=\varphi(\boldsymbol{\alpha},0)+\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta i}\Big|_{\beta=0}\delta\alpha_i+\cdots$$

$$=\alpha+\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_i}\Big|_{\beta=0}\delta\alpha_i+\cdots$$

所以 $$d\alpha_i=\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_k}\Big|_{\beta=0}\delta\alpha_k=\mu_{ik}(\boldsymbol{\alpha})\delta\alpha_k \qquad (2.3.3)$$

其中 $$\mu_{ik}\equiv\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_k}\Big|_{\beta=0}$$

由(2.3.3)可得

$$\delta\alpha_k=\lambda_{ki}d\alpha_i \qquad (2.3.4)$$

其中 $$\lambda_{ik}\mu_{kl}=\delta_{il} \qquad (2.3.5)$$

由(2.2.7)和(2.3.5)式，可得:

$$\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_\mu}=u_{ik}(\boldsymbol{x})\cdot\lambda_{k\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (2.3.6)$$

(2.3.6)一阶微分方程组的可积条件是:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha_\nu\partial\alpha_\mu}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha_\mu\partial\alpha_\nu}$$

或 $$\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}(u_{ik}\lambda_{k\mu})-\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}(u_{ij}\lambda_{j\nu})=0$$

$$\left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial\alpha_\nu}\lambda_{k\mu}+u_{ik}\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}\right)-\left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial\alpha_\mu}\lambda_{j\nu}+u_{ij}\frac{\partial\lambda_{j\nu}}{\partial\alpha_\mu}\right)=0$$

上式前二因子对k 求和，后二因子对j求和，所以可将j和k二指标合并为对一指标k求和，可得:

$$u_{ik}\left(\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}-\frac{\partial\lambda_{k\nu}}{\partial\alpha_\mu}\right)+\lambda_{k\mu}\frac{\partial u_{ik}}{\partial\alpha_\nu}-\lambda_{k\nu}\frac{\partial u_{ik}}{\partial\alpha_\mu}=0 \qquad (2.3.7)$$

由(2.3.6)式知道α的变化会引起x的变化，因此使$u_{ik}(x)$产生相应的变化。

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial\alpha_\nu}=\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\alpha_\nu}=\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}u_{j\gamma}\lambda_{j\nu}$$

代入(2.3.7)可得：

$$u_{ik}\left(\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}-\frac{\partial\lambda_{k\nu}}{\partial\alpha_\mu}\right)+\lambda_{k\mu}u_{j\gamma}\lambda_{\gamma\nu}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}-\lambda_{k\nu}u_{j\gamma}\lambda_{\gamma\mu}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}$$

$$=u_{ik}\left(\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}-\frac{\partial\lambda_{k\nu}}{\partial\alpha_\mu}\right)+\left(u_{j\gamma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}-u_{jk}\frac{\partial u_{i\gamma}}{\partial x_j}\right)\lambda_{k\mu}\lambda_{\gamma\nu}=0$$

上式乘以$\mu_{\mu\tau}\mu_{\nu\sigma}$，并注意到$\lambda_{k\mu}\mu_{\mu\tau}=\delta_{k\tau}$得：

$$u_{j\sigma}\frac{\partial u_{i\tau}}{\partial x_j}-u_{j\tau}\frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j}=\left(-\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}+\frac{\partial\lambda_{k\nu}}{\partial\alpha_\mu}\right)\mu_{\mu\tau}\mu_{\nu\sigma}u_{ik}$$

或

$$u_{j\sigma}\frac{\partial u_{i\tau}}{\partial x_j}-u_{j\tau}\frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j}=C_{\sigma\tau}^{\kappa}u_{ik}(x) \qquad (2.3.8)$$

式中

$$C_{\sigma\tau}^{\kappa}=\left(\frac{\partial\lambda_{k\nu}}{\partial\alpha_\mu}-\frac{\partial\lambda_{k\mu}}{\partial\alpha_\nu}\right)\mu_{\nu\sigma}\mu_{\mu\tau} \qquad (2.3.9)$$

称作群的结构常数。它仅与群本身结构有关，而与表示无关。

由

$$I_\sigma\equiv u_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

及 $[I_\sigma,I_\tau]=I_\sigma I_\tau-I_\tau I_\sigma$

$$[I_\sigma, I_\tau] = u_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{i\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - u_{i\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= u_{j\sigma}\frac{\partial u_{i\tau}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} + u_{j\sigma}u_{i\tau}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - u_{i\tau}\frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j} -$$

$$- u_{i\tau}u_{j\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = \left(u_{j\sigma}\frac{\partial u_{i\tau}}{\partial x_j} - u_{j\tau}\frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

由(2.3.8)式最后可得：

$$[I_\sigma, I_\tau] = C^k_{\sigma\tau}u_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i} = C^k_{\sigma\tau} I_k \qquad (2.3.10)$$

这表明无穷小变换算符所有对易关系可表为无穷小变换算符的线性组合。

李群的结构常数$C^\kappa_{\sigma\tau}$有下列重要性质。

(1)全部结构常数皆为实数。

(2) $C^k_{\sigma\tau} = -C^k_{\tau\sigma}$ (2.3.11)

(3) $C^\mu_{\rho\sigma}C^\nu_{\mu\tau} + C^\mu_{\sigma\tau}C^\nu_{\mu\rho} + C^\mu_{\tau\rho}C^\nu_{\mu\sigma} = 0^*$ (2.3.12)

(2)和(3)请读者证明。

可看出阿贝尔群的结构常数全部是0。

例1 $GL(2,k)$群

$[I_1,I_2]=I_2, [I_2,I_3]=I_1-I_4, [I_3,I_4]=-I_3, [I_4,I_1]=0,$
$[I_1,I_3]=-I_3,\ [I_2,I_4]=I_2.$

$C_{12}^2=1,\ C_{23}^1=1,\ C_{23}^4=-1,\ C_{34}^3=-1,\ C_{13}^3=-1,$

$C_{24}^2=1$，其它全为0。

---

*μ、ν位置固定，对ρ、σ、τ轮换。

例2 $R(3)$群.

$[I_1,I_2]=-I_3$, $[I_2,I_3]=-I_1$, $[I_3,I_1]=-I_2$.

$C_{1\,2}^{\,3}=-1$, $C_{2\,3}^{\,1}=-1$, $C_{3\,1}^{\,2}=-1$, 其它全为0。

例3 洛仑兹群.

$[I_1,I_2]=-I_3$, $[I_2,I_3]=-I_1$, $[I_3,I_1]=-I_2$,

$[I_4,I_5]=+I_3$, $[I_5,I_6]=+I_1$, $[I_6,I_4]=+I_2$,

$[I_1,I_4]=0$, $[I_1,I_5]=-I_6$, $[I_1;I_6]=I_5$,

$[I_2,I_4]=I_6$, $[I_2,I_5]=0$, $[I_2,I_6]=-I_4$,

$[I_3,I_4]=-I_5$, $[I_3,I_5]=I_4$, $[I_3,I_6]=0$.

$C_{1\,2}^{\,3}=-1$, $C_{2\,3}^{\,1}=-1$, $C_{3\,1}^{\,2}=-1$, $C_{4\,5}^{\,3}=+1$, $C_{5\,6}^{\,1}=+1$, $C_{6\,4}^{\,2}=+1$, $C_{1\,5}^{\,6}=-1$, $C_{1\,6}^{\,5}=1$, $C_{2\,4}^{\,6}=+1$, $C_{2\,6}^{\,4}=-1$,

$C_{3\,4}^{\,5}=-1$, $C_{3\,5}^{\,4}=+1$。

小结一下，我们从变换(2.2.1)出发，得出(2.3.6)，然后由(2.3.6)的可积性得出(2.3.8)、(2.3.9)和(2.3.10)，最后得到(2.3.11)和(2.3.12)。S·李证明，如果有一组常数满足(2.3.11)和(2.3.12)，则可由(2.3.8)、(2.3.9)解得u和λ，最后由(2.2.1)求得积分函数，此函数构成群，这就是有名的李氏三定理，我们不作证明，仅列举于下.

定理(2.3.1) 如果存在$x_i=f_i(x0)$满足(2.3.6)，则变换构成群。

定理(2.3.2) 如果存在满足(2.3.8)的一些u，则差一同构可确定满足(2.3.9)的λ(或μ)，使得方程(2.3.6)是可能的。

定理(2.3.3) 对满足(2.3.11)和(2.3.12)的每一组C，

存在一些满足(2.3.8)的u。

参考文献

(1)斯米尔诺夫：高等数学教程 Ⅲ卷1分册。

(2)P·M·康：《李群》。

(3)万哲先：《李代数》。

(4)G·Racah：《群论和核谱》。

(5)严志达：《半单李群、李代数表示论》。

第三章　李代数

§1　李代数定义

设G是域K上的一个r维矢量空间，任取二个矢量$I_\rho, I_\sigma \in G$，定义一个运算——对易子。

$$[I_\rho, I_\sigma] = I_\tau \in G$$

满足条件：

$$(1)[\alpha I_\rho + \beta I_\sigma), I_\tau] = \alpha[I_\rho, I_\tau] + \beta[I_\sigma, I_\tau] \quad (3.1.1)$$

$$(2)[I_\rho, I_\sigma] = -[I_\sigma, I_\rho] \quad (3.1.2)$$

$$(3)[I_\rho, [I_\sigma, I_\tau]] + [I_\sigma, [I_\tau, I_\rho]] + [I_\tau, [I_\rho, I_\sigma]] = 0 \quad (3.1.3)$$

则说矢量空间G构成一李代数g。空间G内r个线性无关的矢量构成李代数g的基。

显然，由李群的无穷小变换算符(生成元)作为基矢所构成的矢量空间是此李群的李代数。

若域K是实数域，则相应的李代数是实的。若域K是复数域，则相应的李代数是复的。与李群相联系的李代数总是实的。

§2　若干定义

本节中简略叙述有关同态、同构、理想、子代数和商代数的定义。

设g和g'是两个李代数，如果有一个从g到g'的映射F满

足下列条件：

(1)$F(\alpha I_\rho+\beta I_\sigma)=\alpha F(I_\rho)+\beta F(I_\sigma)\quad \alpha,\ \beta\in C,$
$I_\rho, I_\sigma\in g$ (3.2.1)

(2)$F([I_\rho,I_\sigma])=[F(I_\rho),F(I_\sigma)]\quad I_\rho,I_\sigma\in g$ (3.2.2)

则李代数g和g'同态。

设g和g'是两个李代数，如果有一个从g到g'上的映射F满足下列条件：

(1)F是1－1映射，且

$$F(\alpha_1 I_\rho+\beta_1 I_\sigma)=\alpha_1 F(I_\rho)+\beta_1 F(I_\sigma)\quad \alpha_1,\beta_1\in C$$
$$I_\rho,I_\sigma\in g \tag{3.2.3}$$

(2)$F([I_\rho,I_\sigma])=[F(I_\rho),F(I_\sigma)]\qquad I_\rho,I_\sigma\in g$

(3.2.4)

则李代数g和g'同构，记作$g\approx g'$。

特别地，由李代数g到自身上的同构，叫作自同构。显然同构的李代数有同一结构常数。研究李代数的基本问题之一就是要定出所有可能的互相不同构的李代数来。

设有李代数g，g_1是g的子集$g_1\subset g$.如果它满足

$$[I_\rho,I_\sigma]\in g_1\qquad (对任意I_\rho,I_\sigma\in g_1) \tag{3.2.5}$$

那末称g_1是李代数g的子代数。如果

$$[I_\rho,I_\sigma]=0\quad (对任意I_\rho,I_\sigma\in g_1) \tag{3.2.6}$$

则称g_1是李代数g的可交换的子代数。或叫阿贝尔子代数。

设有李代数g的一个子代数E，满足

$$[g,E]\subset E. \tag{3.2.7}$$

则李代数g的子代数E叫作g的一个理想或叫不变子代数，就是说对任意$I_\sigma\in g$，$I_\tau\in E$总有$[I_\sigma,I_\tau]\in E$。李代数g的理想当然是g的子代数。如果E_1和E_2是李代数g的理想，则

$E_1 \cup E_2$和$E_1 \cap E_2$也是李代数g的理想。

例 考虑

$$G=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_i \in R \text{的集合}$$

基矢是

$$e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义$[e_1 e_2]=e_3$ $[e_1 e_3]=0$ $[e_2 e_3]=0$ 则矩阵G的集合构成李代数g。结构常数是 $C_{12}^{3}=-C_{21}^{3}=1$，其它全部是0。不难验证

$$D_1=\{\alpha e_3\}$$
$$D_2=\{\alpha e_2+\beta e_3\}$$
$$D_3=\{\alpha e_2+\beta e_3\}$$

分别是李代数g的理想。显然D_1、D_2、D_3都是阿贝尔理想。

设有李代数g，$A\in g$满足下列条件：

$$[A, I_\rho]=0 \qquad I_\rho \in g \tag{3.2.8}$$

那末所有的A组成的集合$C=\{\acute{A}\}$，叫作李代数g的中心，并且是g的一个理想。

设E是李代数g的理想，$X \notin E$，则$\bar{X}=X \cup I$是X对E理想所构成陪集，它是商空间g/E中的一个元素，满足

$$[X \cup E,\ Y \cup E]=[X, Y]+E \tag{3.2.9}$$

叫作李代数g对E的商代数。

李代数的上述概念和李群中相类似的概念相对应。例如群的阶对应于李代数的维数，子群对应于子代数，不变子群或正规子群对应于李代数中的理想。单群对应于单李代数，

半单群对应于半单李代数。关于后二概念定义如下：

设g是李代数，显然g本身及由零矢量构成的子代数{0}是g的理想，如果李代数g除了这两个理想之外，不再有其它的理想，则称李代数g是单李代数。

如果李代数g除了｛0｝以外，不再包含可交换的理想子代数，那末就称李代数g是半单李代数。

单代数和半单代数中每一个生成元和其它生成元的对易子都是非零的。因此结构常数给出了代数的最大信息。我们可用这些信息去决定这个代数的整个结构。

定理（3．2．1） 半单李代数一定是它所有的极小理想（一定是单李代数，而且个数有限。）的直和。

李代数g的一个理想η叫作极小理想。如果它是李代数g的非零理想，而且含在η中的g的理想只有η本身和｛0｝。（证略）

§3 嘉当判别准则

若对李代数的基矢进行正交变换

$$I'_\rho=a_{\rho\nu}I_\nu \qquad \det a\neq 0 \qquad (3.3.1)$$

其中$a=[a_{\rho\nu}]$。则采用新基矢时的结构常数是：

$$C'^{\mu}_{\rho\sigma}I'_\mu=[I'_\rho I'_\sigma]=[a_{\rho\nu}I_\nu,a_{\sigma\lambda}I_\lambda]$$

$$=a_{\rho\nu}a_{\sigma\lambda}[I_\nu,I_\lambda]=a_{\rho\nu}a_{\sigma\lambda}C_{\nu\lambda}^{k}I_k$$

可得 $C'^{\mu}_{\rho\sigma}\ I'_\mu=C'^{\mu}_{\rho\sigma}\ a_{\mu k}I_k=a_{\rho\nu}\ a_{\sigma\lambda}C_{\nu\lambda}{}^{k}I_k$

由I_k的线性无关得：

$$C'^{\mu}_{\rho\sigma}a_{\mu k}=a_{\rho\nu}a_{\sigma\lambda}C_{\nu\lambda}{}^{k}$$

两边乘以$(a^{-1})_{k\tau}$，然后对k求和可得：

$$C'^{\tau}_{\rho\sigma}=a_{\rho\nu}a_{\sigma\lambda}a_{k\tau}^{-1}C^{k}_{\nu\lambda} \tag{3.3.2}$$

可见，在（3.3.1）变换下，$C^{\tau}_{\rho\sigma}$是一个三级张量。其中τ是逆变指标，ρ、σ是协变指标。显然

$$C^{\mu}_{\rho\mu}=a_{\rho\nu}C^{\lambda}_{\nu\lambda}$$

是一个协变矢量。

设$C^{\beta}_{\mu\alpha}$是李代数g的结构常数，定义一对称张量

$$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}=C^{\beta}_{\mu\alpha}C^{\alpha}_{\nu\beta} \tag{3.3.3}$$

通常称$g_{\mu\nu}$是嘉当-开林度规张量。

我们注意到：

（1）$g_{\mu\nu}$是一个矩阵元都是实常数的对称矩阵，因此通过（3.3.1)的正交变换总可把度规张量化为实对角矩阵。

（2)$C_{\lambda\rho\sigma}=g_{\lambda\tau}C^{\tau}_{\rho\sigma}$的指标是全反对称的。由（3.3.3)式

$$C_{\lambda\rho\sigma}=C^{\nu}_{\lambda\mu}C^{\mu}_{\tau\nu}C^{\tau}_{\rho\sigma}=C^{\nu}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\rho\sigma}C^{\mu}_{\tau\nu} \tag{3.3.4}$$

和（2.3.12）式

$$C_{\lambda\rho\sigma}=-C^{\nu}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\sigma\nu}C^{\mu}_{\tau\rho}-C^{\nu}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\nu\rho}C^{\mu}_{\tau\sigma}$$

$$=C^{\nu}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\sigma\nu}C^{\mu}_{\rho\tau}+C^{\nu}_{\mu\lambda}C^{\tau}_{\nu\rho}C^{\mu}_{\tau\sigma} \tag{3.3.5}$$

（3.3.5)式右边对指标的任何循环置换保持不变，但式$C_{\lambda\rho\sigma}=g_{\lambda\tau}C^{\tau}_{\rho\sigma}$中，$g_{\lambda\tau}$是对称张量，$C^{\tau}_{\rho\sigma}$对$\rho$、$\sigma$指标是反对称张量。所以$C_{\lambda\rho\sigma}$对它的指标是全反对称的。

定理(3.3.1) 李代数g是半单李代数的充要条件是嘉当-开林度规张量不退化，即

$$\det|g_{\sigma\lambda}|\neq 0 \tag{3.3.6}$$

证：在证明之前先给出二个结论：

（1)设李代数g有p阶子代数（子群）。则李代数g的结

构常数

$$C_{\rho\sigma}^{\tau}=0 \quad (\rho,\sigma\leqslant p \quad \tau>p) \qquad (3.3.7)$$

(2)设李代数g有p阶理想，则李代数g的结构常数

$$C_{\rho\sigma}^{\tau}=0 \quad (\rho<p \quad \tau>p) \qquad (3.3.8)$$

这里仅证明充分性*。

若李代数g有阿贝尔不变子代数或阿贝尔理想，其元素指标以$\bar{\rho}$、$\bar{\sigma}$……表示之。则

$$g_{\rho\bar{\sigma}}=C_{\rho\lambda}^{\mu}C_{\bar{\sigma}\mu}^{\lambda}=C_{\rho\lambda}^{\mu}C_{\bar{\sigma}\mu}^{\lambda}=C_{\rho\lambda}^{\bar{\mu}}\ C_{\bar{\sigma}\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}}=0$$

这里仅用了(3.3.8)式和$C_{\bar{\sigma}\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}}=0$。

就是说行列式$\det|g_{\rho\sigma}|$中第σ列的元素全是0。显然行列式值应为0.详细证明可参阅万哲先〈李代数〉第61页。

定理(3.3.2) 半单李代数(群)是紧致的充要条件是度规张量矩阵是负定的。或对任一矢量a^{μ}，应有

$$g_{\mu\nu}a^{\mu}a^{\nu}<0 \qquad (3.3.9)$$

(证略)。

由于单李代数一定是半单的**，故上述判据对单李代数也是一个必要条件。由(3.3.6)知，我们可定义$g_{\mu\nu}g^{\mu\tau}=\delta_{\nu}^{\tau}$因此可用度规张量对指标进行升降运算。例如，

$$C_{\rho\sigma\tau}=C_{\rho\sigma}^{\nu}\,g_{\nu\tau}$$

$I^{\rho}=g^{\rho\nu}I_{\nu}$,和嘉当内积$(XY)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{.}X\cdot\mathrm{ad}_{.}Y)=g_{\rho\sigma}\alpha^{\rho}\beta^{\sigma}$
$=g^{\rho\sigma}\alpha_{\rho}\beta_{\sigma}$。其中$X=\sum\limits_{\rho}\alpha_{\rho}I_{\rho}$,$Y=\sum\limits_{\sigma}\beta_{\sigma}I_{\sigma}$。

---

* 由非半单$\det|g|=0$得出$\det|g|\neq0$是半单的。这就证明了定理(3.3.1)的充分性。

** 唯一的例外是一维单李代数。

例1 三维转动群$R(3)$.

$\because\ g_{11}=C_{1\alpha}^{\beta}C_{1\beta}^{\alpha}=C_{12}^{3}C_{13}^{2}+C_{13}^{2}C_{12}^{3}=-2$

$g_{22}=g_{33}=0$,其它全为0.

$\det[g_{\mu\nu}]=-8$，所以是负定的.因此三维转动群是一个半单李群。

例2 洛仑兹群

$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-2, g_{44}=g_{55}=g_{66}=+2$,其它全是零。度规张量矩阵是不定的,因此洛仑兹群是一个半单非紧致李群.

§4 卡塞米尔算子

设g是半单李代数，基矢是I_σ、I_ρ、I_τ……。半单李代数g的卡塞米尔算子是:

$$C=g^{\rho\sigma}I_\rho I_\sigma \tag{3.4.1}$$

设$I_\tau\in g$，则$[C, I_\tau]=0$.

证:$[C,I_\tau]=g^{\rho\sigma}[I_\rho I_\sigma,I_\tau]=g^{\rho\sigma}I_\rho[I_\sigma,I_\tau]+g^{\rho\sigma}[I_\rho,I_\tau]I_\sigma$
$=g^{\rho\sigma}C_{\sigma\tau}^{\lambda}I_\rho I_\lambda+g^{\rho\sigma}C_{\rho\tau}^{\lambda}I_\lambda I_\sigma=g^{\rho\sigma}C_{\sigma\tau}^{\lambda}I_\rho I_\lambda+g^{\sigma\rho}C_{\sigma\tau}^{\lambda}I_\lambda I_\rho$

$$=g^{\rho\sigma}C_{\sigma\tau}^{\lambda}(I_\rho I_\lambda+I_\lambda I_\rho) \tag{3.4.2}$$

由 $C_{\nu\sigma\tau}=g_{\lambda\nu}C_{\sigma\tau}^{\lambda}$, 及 $C_{\sigma\tau}^{\lambda}=g^{\lambda\nu}C_{\nu\sigma\tau}$, 得:

$$[C, I_\tau]=g^{\rho\sigma}g^{\lambda\nu}C_{\nu\sigma\tau}(I_\rho I_\lambda+I_\lambda I_\rho) \tag{3.4.3}$$

又$C_{\nu\rho\tau}$是反对称的，$(I_\rho I_\lambda+I_\lambda I_\rho)$对$\rho$、$\lambda$指标是对称的，$C=g^{\rho\sigma}I_\rho I_\sigma$对$\rho$、$\sigma$指标也是对称的。因此,

$[C, I_\tau]=0$

拉卡定义

$$C=C_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}C_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}C_{\alpha_3\beta_3}^{\beta_4}\cdots\cdots C_{\alpha_n\beta_n}^{\beta_1}I^{\alpha_1}I^{\alpha_2}\cdots I^{\alpha_n} \tag{3.4.4}$$

是广义的卡塞米尔算子。

据舒尔引理，若表示是不可约的，则C一定是一个数量对角矩阵。这表明不可约表示中，卡塞米尔算子是一数值。因此它可以表征一个不可约表示。

例 三维转动群$g_{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}$

$$\therefore\quad C=-\delta_{\mu\nu}I_\mu I_\nu=-I_\mu I_\mu=-(iH_\mu)(iH_\mu)=H_\mu H_\mu$$
$$=J_\mu J_\mu=J^2$$

后面将谈到三维转动群的卡塞米尔算子就是总角动量算子。对三维转动群的每一个不可约表示，可由算符J^2的本征值$J(J+1)$来标志某个量子态的量子数。后面将证明用J值来标志三维转动群的某一不可约表示。用J和J_3值来标志某一不可约表示中的本征态。

应该注意到，仅仅对半单李代数才能定义卡塞米尔算子。但这并不等于说对非半单李代数不存在标量算符和全部无穷小生成元都可对易。例三维运动群E_3（也叫欧几里德群），

$$x_i'=a_{ik}x_k+a_i \quad (i,\ k=1,2,3)$$

它的生成元是二个子群(一个是转动群另一个是平移群)的生成元的直和。即生成元J_1、J_2、J_3；P_1、P_2、P_3，它们满足对易关系：

$$[J_i,\ J_k]=\varepsilon_{ikl}J_l \qquad [P_iP_k]=0$$
$$[P_iJ_k]=\varepsilon_{ikl}P_l$$

可见P_i是E_3的理想。所以和E_3群相应的李代数不是半单李代数。可验证$\boldsymbol{P}^2$和$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$二个标量算符和全部6个生成元都可对易。因此对欧几里德群E_3的不可约表示可用它们的本征值来表征。所以它们也叫卡塞米尔算子。

§5 李群和李代数

李群和李代数关系由下述几个定理阐明。这里仅作叙述，不作证明。

定理3.5.1 设G是一个李群，I_μ是李群G的生成元。那末集合$g=\{\beta^\mu I_\mu,\ \beta^\mu \in R\}$构成一个实李代数。叫作李群$G$的李代数。反之，若$g=\{\beta^\mu I_\mu,\ \beta^\mu \in R\}$是一李代数，那末有一个单连通李群$SG$。它的李代数是$g$。这个李群$SG$在同构意义下是唯一的。

定理3.5.2 设G_1、G_2是两个李群，李群G_1和李群G_2局部同构（或局部同态）的充要条件是李群G_1的李代数g_1和李群G_2的李代数g_2同构(或同态)。

如果李群G的元素都可交换，就称李群G是阿贝尔的，与此群相应的生成元，将构成一个阿贝尔李代数。

如果李群G的生成元集$\{I_\tau\}$可以分解成两个集合的和，每一个集合的对易子是封闭的，而不同集合的元素之间是可交换的，那末与这两个子代数相联系的群H_1和H_2是可交换的，我们把群G称为H_1和H_2的直积，并且用$G=H_1\times H_2$来表示。

定理3.5.3 设G是一个李群。G_1、G_2是李群G的两个李子群。又设李群G和两个李子群G_1、G_2的李代数分别是g、g_1和g_2。那么G是G_1、G_2的直积李群的充要条件是李代数g是两个子代数g_1和g_2的直和。

§6 半单李代数的标准形式

设g是一李代数，基矢是I_1、$I_2\cdots\cdots I_\mu\cdots\cdots I_\sigma\cdots\cdots$。有

A，$X\in g$

其中$A=a^{\mu}I_{\mu}$ (3.6.1)

$X=b^{\nu}I_{\nu}$ (3.6.2)

式中对指标μ 、ν分别求和。

且满足$[A,X]=\rho X$ (3.6.3)

这是一个本征值方程。ρ是本征值，X是 相应的本征矢量。把（3.6.1)和(3.6.2）代入可得：

$$a^{\mu}b^{\nu}[I_{\mu}I_{\nu}]=\rho b^{\tau}I_{\tau}$$

$$a^{\mu}b^{\nu}C_{\mu\nu}^{\tau}I_{\tau}=\rho b^{\tau}I_{\tau} \quad (3.6.4)$$

因I_{τ}是线性无关的。于是有

$$(a^{\mu}C_{\mu\nu}^{\tau}-\rho\delta_{\nu}^{\tau})b^{\nu}=0 \quad (3.6.5)$$

又因b^{ν}不全为0，因此得久期方程：

$$\det|a^{\mu}C_{\mu\nu}^{\tau}-\rho\delta_{\nu}^{\tau}|=0 \quad (3.6.6)$$

（3.6.6）方程的每一个解，叫作一个“根”。对于r维(r阶）李代数，方程（3.6.6）有r个根（可能有重根）。

嘉当指出：若选择A，使得久期方程（3.6.6）有最大数目的不同根。那么对于半单李代数g，只有$\rho=0$才是简并的。换句话说久期方程（3.6.6)只有$\rho=0$时才有重根。若$\rho=0$是l度简并的，则叫李代数g的秩是l。

设李代数g的秩是l，则A和l个线性无关的本征矢量$H_i(i=1,2,\cdots,l)$满足

$$[A,\ H_i]=0 \quad (3.6.7)$$

由$H_i(i=1,2,\cdots,l)$可构成李代数g的l维子空间。现由久期方程(3.6.6）的其他（$r-l$）个各不相同的（非简并）根α来定义A的本征矢量E_{α}，即

$$[A,E_{\alpha}]=\alpha E_{\alpha} \quad (3.6.8)$$

则所有这些矢量E_α生成李代数g的$(r-l)$维子空间。

因A和H_i可对易，于是

$$A=\lambda^i H_i \qquad (3.6.9)$$

我们现在来研究根的一些性质。考虑对易关系

$$\begin{aligned}[A,[H_i, E_\alpha]]&=[A,H_iE_\alpha-E_\alpha H_i]\\&=[A,H_iE_\alpha]-[A,E_\alpha H_i]\\&=[A,H_i]E_\alpha+H_i[A,E_\alpha]-[A,E_\alpha]H_i-\\&\quad -E_\alpha[A,H_i]=\alpha H_iE_\alpha-\alpha E_\alpha H_i\\&=\alpha[H_i,E_\alpha]\end{aligned} \qquad (3.6.10)$$

如果本征矢量E_α的本征值是α。由(3.6.10)看出l个$[H_i,E_\alpha]$本征矢量都有本征值α。但是，α是非简并的。于是每一个本征矢量$[H_i, E_\alpha]$，都必定跟E_α成正比，即

$$[H_i,E_\alpha]=\alpha_iE_\alpha \qquad (3.6.11)$$

其中α_i是一比例常数，所以

$$C_{i\alpha}^{\sigma}=\alpha_i\delta_\alpha^\sigma \qquad (3.6.12)$$

把(3.6.8)、(3.6.9)和(3.6.11)式作比较，我们有

$$\alpha=\lambda^i\alpha_i \quad (i=1,2,3,\cdots l) \qquad (3.6.13)$$

因此α_i可看作l维空间中的矢量α的协变分量。所以我们也叫矢量α是根矢量或简称为根。

由雅可比恒等式，有

$$[A,[E_\alpha,E_\beta]]+[E_\alpha,[E_\beta,A]]+[E_\beta,[A,E_\alpha]]=0$$

由(3.6.8)式，我们有

$$[A,[E_\alpha,E_\beta]]-\beta[E_\alpha,E_\beta]+\alpha[E_\beta,E_\alpha]=0$$

故$[A,[E_\alpha,E_\beta]]=(\alpha+\beta)]E_\alpha,E_\beta]$ (3.6.14)

因此矢量$[E_\alpha,E_\beta]$是属于本征值为$(\alpha+\beta)$的A的本征矢量，由此，我们有

当 $\alpha+\beta=0$，即$\beta=-\alpha$，有$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=C_{\alpha}{}^{i}{}_{-\alpha}H_i$

$$(3.6.15)$$

当$\alpha+\beta$不是根，有$[E_\alpha,E_\beta]=0$或$C_{\alpha}{}^{\tau}{}_{\beta}=0$　　(3.6.16)

当$\alpha+\beta$是一根，有

$$[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}\text{或}N_{\alpha\beta}=C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}\quad\tau=\alpha+\beta\quad(3.6.17)$$

定理3.6.1 若α是半单李代数g的一个根，那么$-\alpha$也是李代数g的一个根。

证：考虑嘉当-开林度规张量：

$$g_{\alpha\tau}=g_{\tau\alpha}=C^{\ \mu}_{\alpha\nu}C^{\ \nu}_{\tau\mu}\text{（对指标}\mu,\nu\text{分别求和）}\quad(3.6.18)$$

因$C^{\ \mu}_{\alpha\nu}$满足(3.6.12)、(3.6.15)和(3.6.16)，于是有

$$g_{\alpha\tau}=C^{\ \alpha}_{\alpha\nu}C^{\ \nu}_{\tau\alpha}+C^{\ \mu}_{\alpha-\alpha}C^{-\alpha}_{\tau\mu}+\sum_{\beta\neq-\alpha}C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}\cdot C_{\tau}{}^{\beta}{}_{\alpha+\beta}$$

$$(3.6.19)$$

若$\tau\neq-\alpha$，则　$g_{\alpha\tau}=0$.因此，若$-\alpha$不是根，那么$\det|g_{\alpha\tau}|=0$；这样，嘉当判据对半单李代数就不成立了。这就证明了$-\alpha$一定是一个根。

我们规定（3.6.8）式中E_α的归一化以使得

$$g_{\alpha-\alpha}=1\qquad(3.6.20)$$

这样就有

$$g_{\sigma\rho}=\left|\begin{array}{c:cccccc} g_{ik} & & & & & & \\ \hdashline & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{array}\right|$$

因为$\det|g_{\sigma\rho}|\neq0$，于是有：

$$\det|g_{ik}|\neq 0 \quad (3.6.21)$$

由（3.6.12）式，得：

$$g_{ik}=\sum_{\alpha} C_{i\alpha}^{\alpha} C_{k\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_k \quad (3.6.22)$$

因此，g_{ik}可以作为由矢量α构成的l维空间中的度规张量。我们注意到

$$C_{\alpha,-\alpha}^{i}= g^{ik} g_{kl} C_{\alpha,-\alpha}^{l} = g^{ik} C_{k,\alpha,-\alpha}= g^{ik}C_{-\alpha,k,\alpha}$$

$$=g^{ik} g_{-\alpha\beta} C_{k\alpha}^{\beta}= g^{ik} C_{k\alpha}^{\alpha}= g^{ik} \alpha_k= \alpha^i \quad (3.6.23)$$

其中用了（3.6.20）式和（3.6.12）式，于是，

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]= \alpha^i H_i \quad (3.6.24)$$

显然 α^i是矢量α的逆变分量。

现在，可以写出半单李代数的正则形式（通常叫作嘉当-外尔形式）。

$$[H_i,H_k]=0 \quad (3.6.25a)$$

$$[H_i,E_\alpha]= \alpha_i E_\alpha \quad (3.6.25b)$$

$$[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} \quad (3.6.25c)$$

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i \quad (3.6.25d)$$

由（3.6.25a）式看出（$H_1,H_2,\cdots,H_l$）生成半单李代数g的一个对易的子代数，通常叫作嘉当子代数。它是g中的最大的阿贝尔子代数。

§7 根矢量

定理3.7.1 如果α和β是根，那么$2(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha)$是一整数，而且$\beta-2\alpha(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha)$也是一个根。（其中$(\alpha\cdot\beta)=\alpha_i\beta^i$）。

证　设$\gamma=\beta$是一根。但是，使得$\alpha+\gamma$不是根。由(3.6.25)式：

$$[E_{-\alpha}, E_{\gamma}]=N_{-\alpha,\gamma}E_{\gamma-\alpha}=E'_{\gamma-\alpha}$$

$$[E_{-\alpha}, E_{\gamma-\alpha}]=E'_{\gamma-2\alpha}$$

…………

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-j\alpha}]=E'_{\gamma-(j+1)\alpha} \tag{3.7.1}$$

其中"$'$"号表示不考虑$E_{\gamma-\alpha}$、$E_{\gamma-2\alpha}$、$E_{\gamma-j\alpha}$的归一化。由于E_β只能有有限的数目。所以经过h个步骤后，得到：

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-h\alpha}]=E'_{\gamma-(h+1)\alpha}=0 \tag{3.7.2}$$

由(3.6.17)式，有

$$[E_{\alpha}, E'_{\gamma-(j+1)\alpha}]=\mu_{j+1}E'_{\gamma-j\alpha} \tag{3.7.3}$$

从(3.7.3)和(3.7.2)两式中消去$E'_{\gamma-(j+1)\alpha}$求出μ_{j+1}：

$$\begin{aligned}\mu_{j+1}E'_{\gamma-j\alpha}&=[E_{\alpha},[E_{-\alpha},E'_{\gamma-j\alpha}]]\\&=-[E'_{\gamma-j\alpha},[E_{\alpha},E_{-\alpha}]]-\\&\quad-[E_{-\alpha},[E'_{\gamma-j\alpha},E_{\alpha}]]=-[E'_{\gamma-j\alpha},\alpha^iH_i]\\&\quad+\mu_j[E_{-\alpha},E'_{\gamma-(j-1)\alpha}]\\&=\alpha^i[H_i,E'_{\gamma-j\alpha}]+\mu_jE'_{\gamma-j\alpha}\\&=\alpha^i(\gamma-j\alpha)_iE'_{\gamma-j\alpha}+\mu_jE'_{\gamma-j\alpha}\end{aligned} \tag{3.7.4}$$

用(3.6.25)式和(3.7.4)式，得到一个递推公式：

$$\mu_{j+1}=\alpha^i(\gamma-j\alpha)_i+\mu_j=(\alpha\cdot\gamma)-j(\alpha\cdot\alpha)+\mu_j, \tag{3.7.5}$$

因为μ_0无定义，所以上式仅对$j\geqslant 1$时才成立

若定义$\mu_0=0$，则$j=0$时$\mu_1=(\alpha\cdot\gamma)$.

把（3.7.5）式具体写出

$$
\begin{array}{ll}
j=0 & \mu_1=(\alpha\cdot\gamma)\\
j=1 & \mu_2=(\alpha\cdot\gamma)-(\alpha\cdot\alpha)+\mu_1\\
j=2 & \mu_3=(\alpha\cdot\gamma)-2(\alpha\cdot\alpha)+\mu_2\\
\vdots & \\
j=j-2 & \mu_{j-1}=(\alpha\cdot\gamma)-(j-2)(\alpha\cdot\alpha)+\mu_{j-2}\\
j=j-1 & \mu_j=(\alpha\cdot\gamma)-(j-1)(\alpha\cdot\alpha)+\mu_{j-1}
\end{array}
$$

我们可得到

$$
\begin{aligned}
\mu_j&=j(\alpha\cdot\gamma)-(\alpha\cdot\alpha)[1+2+3+\cdots+(j-2)+(j-1)]\\
&=j(\alpha\cdot\gamma)-[j(j-1)/2](\alpha\cdot\alpha) \qquad (3.7.6)
\end{aligned}
$$

由（3.7.2）式和（3.7.3）式，有：

$$\mu_{h+1}=0$$

所以

$$(\alpha\cdot\gamma)=h(\alpha\cdot\alpha)/2 \qquad (3.7.7)$$

$$\mu_j=j(h-j+1)(\alpha\cdot\alpha)/2 \qquad (3.7.8)$$

若β是任一根，那么总存在某一整数$j\geqslant 0$，使得$\gamma=\beta+j\alpha$是一个根，但$\gamma+\alpha$不是根，因此由（3.7.8）式，有

$$(\alpha\cdot\gamma)=[\alpha\cdot(\beta+j\alpha)]=(\alpha\cdot\beta)+j(\alpha\cdot\alpha)=h(\alpha\cdot\alpha)/2$$

即

$$(\alpha\cdot\beta)=(h-2j)(\alpha\cdot\alpha)/2 \qquad (3.7.9)$$

若有一个根α，使得$(\alpha\cdot\alpha)=0$。那么由(3.7.9)式可得$(\alpha\cdot\beta)=0$.这表明α与所有的根都正交。但所有的根张成一个l维空间。那么有一个根α和l维空间中的所有的矢量都正交。这和(3.6.21）式相矛盾。因此$(\alpha\cdot\alpha)$不能等于零.这样有

$$h=2(\alpha\cdot\gamma)/(\alpha\cdot\alpha)$$

$$h-2j=2(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha) \qquad (3.7.10)$$

显然$h-2j$是一个整数.

综上所述，若α、γ是根，但$\alpha+\gamma$不是根 那么就有一个根链

$$\gamma,\gamma-\alpha,\gamma-2\alpha,\cdots,\gamma-h\alpha \qquad (3.7.11)$$

由于β是属于这个根链的，于是有：

$$\beta-\frac{2(\alpha\cdot\beta)}{(\alpha\cdot\alpha)}\alpha \qquad (3.7.12)$$

也是一个根。并且属于根链（3.7.11）。因为$\gamma=\beta$，这根链称作β的α根链。

定理3.7.2 若α是根，那么所有α的整数倍量$K\alpha$中，只有α、0、$-\alpha$是根。

证： 因 $[E_\alpha,E_\alpha]=0$，由（3.6.25c）我们得到2α不是根。如果对任一$K>1$，$K\alpha$是根，这将会有一个根链，这个根链含有2α。但2α不是根，因而$K\alpha(K>1)$不是根。同理可证，$K\alpha(K<1)$也不是根。

定理3.7.3 设$\beta\neq0$，$\alpha\neq0$，β的α根链所包含根的个数最多只含有4个。因此，

$$2(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha)=0,\pm1,\pm2,\pm3 \qquad (3.7.13)$$

证：我们可以假定$\beta\neq\pm\alpha$。因为如果$\beta=\pm\alpha$，那么β的α根链仅由α、0、$-\alpha$所组成。定理成立。

设β的α根链有5个根，假定它们是$\beta-2\alpha$、$\beta-\alpha$、β、$\beta+\alpha$、$\beta+2\alpha$.因为（$\beta+2\alpha$）$-\beta=2\alpha$和$(\beta+2\alpha)+\beta=2(\alpha+\beta)$都不是根。因此，$\beta+2\alpha$的$\beta$根链仅只有一个根$\beta+2\alpha$。所以

$$[(\beta+2\alpha)\cdot\beta]=0 \qquad (3.7.14)$$

同样地$\beta-2\alpha-\beta$和$\beta-2\alpha+\beta$ 都不是根。因此$\beta-2\alpha$ 的β根链仅只有$\beta-2\alpha$。所以$[(\beta-2\alpha)\cdot\beta]=0$ (3.7.15)

(3.7.14)和(3.7.15)两式相加得到$(\beta\cdot\beta)=0$ (3.7.16)

这个结果仅当$\beta=0$时才满足，这和原来假设$\beta\neq0$相矛盾。于是证明了β的α根链最多只能有四个根。

由(3.7.11)式的根链，及(3.7.9)式有

$$\frac{2(\alpha\cdot\beta)}{(\alpha\cdot\alpha)}=h-2j=(h-j)-j=k-j$$

其中$k=h-j$。

因为β的α根链最多只能有四个根。于是

$$h=j+k<3$$

因此 $$\frac{2(\alpha\cdot\beta)}{(\alpha\cdot\alpha)}=0,\pm1,\pm2,\pm3. \qquad (3.7.17)$$

前一节(3.6.25c)中$N_{\alpha,\beta}$尚未决定。设$\beta=\gamma-j\alpha$，由(3.7.1)和(3.7.3)式可得

$$\mu_j E_{\alpha+\beta}=[E_\alpha,[E_{-\alpha}E_{\alpha+\beta}]]=[E_\alpha,N_{-\alpha,\alpha+\beta},E_\beta]=$$

$$=N_{-\alpha,\alpha+\beta}[E_\alpha,E_\beta]=N_{-\alpha,\alpha+\beta},N_{\alpha\beta},E_{\alpha+\beta}$$

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=\mu_j=j(h-j+1)(\alpha\cdot\alpha)/2 \qquad (3.7.18)$$

这里用到了(3.7.8)式。令 $h=j+k$，则上式可写为

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=j(k+1)(\alpha\cdot\alpha)/2 \qquad (3.7.19)$$

其中j、k 数值可由下列根链决定：

$$\beta+j\alpha,\ \beta+(j-1)\alpha,\cdots,\ \beta-k\alpha \qquad (3.7.20)$$

通过具体计算，可以求证$N_{\alpha\beta}$满足下述的对称关系：

$$N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta},\qquad N_{\beta,-\alpha-\beta}=N_{-\alpha-\beta,\alpha}=N_{\alpha\beta}$$

$$N_{-\alpha,-\beta}=-N_{-\beta-\alpha} \qquad (3.7.21)$$

因此 $$N_{\alpha\beta}=\sqrt{j(k+1)(\alpha\cdot\alpha)/2} \qquad (3.7.22)$$

§8 根图

由（3.6.13）式 $\alpha=\lambda^i\alpha_i \quad (i=1,2,\cdots,l)$

我们把α叫作根矢量。它在l维空间中有l个协变分量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,l)$。由根矢量可构成l维的根矢量图，简称根图。范特瓦登曾经证明，对一个根矢量系仅仅对应一个根图。这样他就给出了半单李代数完全的分类。下面讲述范特互登方法。

首先小结一下前面得到的结果。

（1）若α是一根矢量，则$-\alpha$也是根矢量。

（2）若α、β是根矢量，则$2(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha)$是一个整数。

（3）若α、β是根矢量，则 $\beta-2\alpha(\alpha\beta)/(\alpha\cdot\alpha)$ 也是根矢量。

（4）设α、β两根矢量之间夹角是φ，由下式给出：

$$\cos\varphi=(\alpha\cdot\beta)/\sqrt{(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)} \qquad (3.8.1)$$

或

$$\cos^2\varphi=(\alpha\cdot\beta)^2/(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta) \qquad (3.8.2)$$

由定理3.7.3可得：

$$\cos^2\varphi=0,1/4,1/2,3/4,1. \qquad (3.8.3)$$

又因α是一根矢量，$-\alpha$也是根矢量，所以只取锐角。得

$$\varphi=0,30°,45°,60°,90°. \qquad (3.8.4)$$

我们用$k_{\alpha\beta}$表示两个根矢量α、β长度之比，即

$$k_{\alpha\beta}=\sqrt{(\alpha\alpha)/(\beta\beta)} \qquad (3.8.5)$$

于是 $\varphi=90°$ $\quad k_{\alpha\beta}=$不定 $\quad k^2_{\alpha\beta}=$不定

$\varphi=60°$ $\quad k_{\alpha\beta}=1$ $\quad k^2_{\alpha\beta}=1$

$\varphi=45°$ $\quad k_{\alpha\beta}=\sqrt{2}$ $\quad k^2_{\alpha\beta}=2$

$\varphi=30°$ $\quad k_{\alpha\beta}=\sqrt{3}$ $\quad k^2_{\alpha\beta}=3$

例 1 秩李代数根图（A_1）

$-\alpha$　　　　0　　　　α

0 ——— 0 ——— 0

它所对应的群是$SU(2)$或$SO(3)$群。

例　2 秩李代数根图。

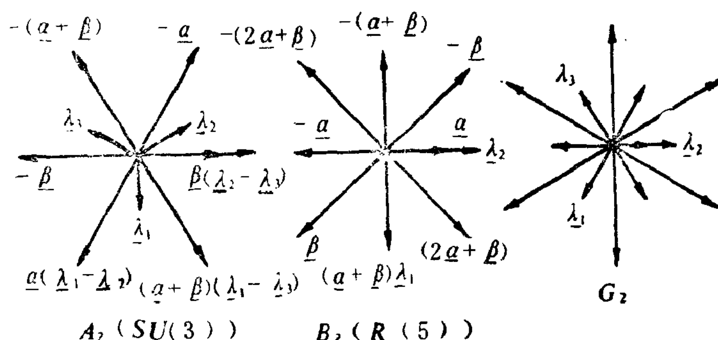


图2

根矢量之间夹角分别是 60°，45°，30°。所对应的群是$SU(3)$，$SO(5)$，G_2群。群的生成元的个数是8，10，14。

如果一个根矢量的第一个非零分量是正的，则称这根矢量为正根，记为α^+。

假使α和α'是两个根矢量，如果$\beta=\alpha-\alpha'$矢量的第一个非零分量是正的，则我们称α根矢量比α'大。

如果一个正根不能分解为两个正根之和，我们称它是素根。以后用Σ符号表示全体根的集合。用Π表示全体素根的集合。

§9　邓金图

范特瓦登的根图，对$l\leqslant 2$的代数或群的根矢量，给出了

一种简单的描述。但是，对于$l>2$的情况，二维的表示就不再可能。邓金证明：对于给定的半单李代数来说，有关它的根矢量的所有基本信息，都可以从素根的集合Π中推出。他进一步证明，可以用称之为邓金图的二维图形把素根表示出来；而且从这种图形，容易得到根矢量的完全集合，以及有关根的长度及夹角的所有的信息。

定理3.9.3 如果根矢量α和β是两个素根，那么它们之间夹角$\theta_{\alpha\beta}$等于90°，120°，135°或150°。如果$(\alpha\alpha)\leqslant(\beta\beta)$，那么

$$\frac{(\beta\beta)}{(\alpha\alpha)}=\begin{cases}1 & \text{当}\theta=120^\circ\\ 2 & \text{当}\theta=135^\circ\\ 3 & \text{当}\theta=150^\circ\\ \text{不定} & \text{当}\theta=90^\circ\end{cases}\qquad(3.9.1)$$

我们在图形上用小圆点表示每个素根。最大长度的素根用空心圆圈表示“○”。最小长度的素根用实心圆点表示“●”。按照素根之间的夹角是120°，135°和150°，相应的小圆圈用单线、双线或三线连结起来。对两个夹角是90°的根，相应的小圆圈之间不加连线（注意到：对任意单李代数来说，其素根最多只能有两种不同的长度）。

例 B_2代数，有 ○═●

邓金证明了对于每一单李代数，都有一个唯一的图形与之相关联，如表1所示。除此之外，没有其它可能的图形。

用邓金图可把单李代数的所谓嘉当分类表述为下述定理。

定理3.3.1 全部单李代数由$A_l(l\geqslant 1)$，$B_l(l\geqslant 2)$，$C_l(l\geqslant 3)$，$D_l(l\geqslant 4)$等四个典型李代数和五个例外李代数G_2，F_4，F_6，E_7和E_8所穷尽。

表1 典型李代数（典型群） r（群的阶） $(r-l)$（根总数），

		r	$r-l$
A_l	a_1 a_2 … a_l （l个）	l^2+2l	l^2+l
B_l	a_1 a_2 … a_l （l个）	$2l^2+l$	$2l^2$
C_l	a_1 a_2 … a_l （l个）	$2l^2+l$	$2l^2$
D_l	a_1 a_2 a_3 … a_l （l个）	$2l^2-l$	$2(l-1)$

例外李代数（例外群）

	r	$r-l$
G_2	14	12
F_4	52	48
E_6	78	72
E_7	133	126
E_8	248	240

参考文献

(1)斯米尔诺夫：《高等数学教程》Ⅲ卷1分册.

(2)万哲先： 《李代数》.

(3)B.G.Wybourne：《*Classical groups for physicists*》.

(4)严志达：《半单李群、李代数表示论》.

(5)E.B.DynKin：《*Maximal sub—groups of the classical groups*》 *Amer. Math. soc. Trans.* I *VoLb*

(6)R.Gilmore：《*Lie groups, Lie ALgebras and some of their AppLication*》.

第四章　单李代数的表示

§1　单李代数的表示

设g是个李代数而V是复数域上的一个有限维向量空间。从g到V上的线性变换李代数$gL(V)$的一个同态映射就叫作李代数g的一个线性表示，或简称表示 D。每一李代数，都有一个有限维的忠实表示(一一表示)。表示矩阵中的行数或列数叫作该表示的维数。

等价表示，可约表示，不可约表示及完全可约等概念和第一章内所讲的相类似。例如，如果存在着一个常数矩阵X，使得

$$XD(I_0)X^{-1}=A(I_0)$$

我们就称这两个表示$D(I_0)$和$A(I_0)$是等价的。

表示中最重要的最有用的是伴随表示。设g是一李代数，$I_\sigma\in g$，定义：

$$\mathrm{ad}(I_\sigma):\ Z\to[I_\sigma,Z],\ Z\in g \qquad (4.1.1)$$

显然，$\mathrm{ad}(I_\sigma)$是李代数g到自身上的线性变换，给出了g的一个表示，叫作伴随表示。

设有李代数g，其生成元是$(I_\rho,I_\sigma,I_\nu,\cdots)$。由它作为基矢所生成的矢量空间内，伴随表示是

$$\mathrm{ad}I_\sigma|I_\rho>=|[I_\rho,\ I_\sigma]>=-|C^\mu_{\sigma\rho}\ ,I_\mu>=-C^\mu_{\sigma\rho}|I_\mu>$$

即 $(\mathrm{ad}(I_\sigma))^\mu_\rho=-C^\mu_{\sigma\rho}$。或伴随表示的矩阵元是李代数

的结构常数，它的维数是李代数的生成元的数目。

§2 权和权空间

因矩阵H_i($i=1,2,\cdots,l$)是相互对易的，于是在表示空间R_A中可以找到它们的公共的本征矢量。即：设本征矢量为

$$|U_\Lambda\rangle=|U_{\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_l}\rangle \tag{4.2.1}$$

则

$$H_i|U_\Lambda\rangle=\Lambda_i|U_{\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_l}\rangle \tag{4.2.2}$$

由数($\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_l$)构成一个$l$维空间$\Delta_A$中的矢量$\vec{\Lambda}$(大写)的协变分量。本征值$\Lambda_i$叫作权。这个矢量$\vec{\Lambda}$叫作本征矢量$|U_\Lambda\rangle$的权矢量。我们称这个空间$\Delta_A$是权空间。

令

$$H\equiv(H_1,H_2,H_3,\cdots,H_l) \tag{4.2.3}$$

设$|U_\Lambda\rangle$是权$\vec{\Lambda}$的本征矢量，则

$$E_\alpha|U_\Lambda\rangle \tag{4.2.4}$$

是权$\vec{\Lambda}+\vec{\alpha}$的本征矢量。其中$\vec{\alpha}$是一个$l$分量的根矢量。这可由下面的推导看出：

$$\begin{aligned}H_iE_\alpha|U_\Lambda\rangle&=\{E_\alpha H_i+[H_i,E_\alpha]\}|U_\Lambda\rangle\\&=(\alpha_i+\Lambda_i)E_\alpha|U_\Lambda\rangle\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

或

$$HE_\alpha|U_\Lambda\rangle=(\vec{\Lambda}+\vec{\alpha})E_\alpha|U_\Lambda\rangle \tag{4.2.6}$$

因为H_i之间可相互对易，所以，$H_i|U_\Lambda\rangle$也属于权$\vec{\Lambda}$的本征矢量。

表示空间R_A可以分解为权子空间R_A^Λ的直和。

$$R_A=\sum_{\Lambda\in\Delta_A}R_A^\Lambda \tag{4.2.7}$$

我们把R_A^Λ中的每一个矢量，看成一个权为$\vec{\Lambda}$的矢量，那么从(4.2.6)式，有

$$E_\alpha|U_\Lambda\rangle\in R_A^{\Lambda+\alpha}\quad 当\ \Lambda+\alpha\in\Delta_A \tag{4.2.8}$$

$$= 0 \qquad \text{当} \ \Lambda + \alpha \notin \Delta_\Lambda$$

若在一个坐标系（基矢系）中权的第一个非零分量是正数，则叫此权是正的。若两权之差（$\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}'$）是正的，则说权$\bar{\Lambda}$比权$\bar{\Lambda}'$高。若一个权比其它的所有权都高，则叫此权是表示$\Lambda$中的最高权或首权。

以$SU(2) = A_1$代数为例。它的生成元是J_0, J_+, J_-. J_0的本征值叫作权. j值是首权。它表征A_1代数的不可约表示。

在表示空间R_Λ中，选用权矢量$|\eta_1>$，$|\eta_2>\cdots|\eta_N>$作为基矢，其中矢量$|\eta_i>$的权是Λ_i。如果权Λ_i的次序按下列规则排列：

$$\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \Lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_N \tag{4.2.9}$$

则我们称这组基$|\eta_1>$, $|\eta_2>\cdots|\eta_N>$是正则的。

可以证明，对于半单李代数伴随表示的非0权矢量$\bar{\alpha}$即根矢量，0权的多重性等于半单李代数的秩.

§3 关于权的一些定理

定理4.3.1 任一权Λ与任一素根α所形成的l个标积$2(\Lambda\cdot\alpha)/(\alpha\cdot\alpha)$是整数。$\Lambda - [2(\Lambda\cdot\alpha)/(\alpha\cdot\alpha)]\cdot\alpha$是一个权。（证略）

定理表明，权矢量Λ在l个素根上共有l个投影，这些投影值只能是正负整数或半整数。

定理4.3.2 任一表示空间R_Λ至少有一个权。

定理4.3.3 若矢量$|U_\Lambda>$的权是Λ，可以表为权$\Lambda^{(k)}$的矢量的线性组合，并且所有的权$\Lambda^{(k)}$都不等于权Λ，则矢量$|U_\Lambda>$是零矢量。

这条定理表明，具有不同权的本征矢量是线性无关的。因

此，N维表示空间内，最多有N个不同的权。

若一个权含有ν个本征态，则说此权是ν度简并的，或权的多重性是ν重的。

若一个权属于一个本征态，则说此权是单的或非简并的。

定理4.3.4 不可约表示的首权一定是单的，若二个不可约表示的首权相等，则此二表示是等价的。

定理4.3.5 权矢量Λ是某个不可约表示的首权的充要条件是：

$$a_{\alpha}=2(\Lambda\cdot\alpha)/(\alpha\cdot\alpha) \quad (\alpha\in\Pi) \quad (4.3.1)$$

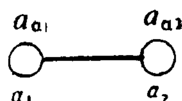
为非负整数（包括零）。如果$|\eta>$是表示Λ的一个最高权矢量，而$\alpha\in\Pi$，那么

$$E^{k}_{-\alpha}|\eta>\neq 0 \quad (k\leqslant \Lambda_{\alpha})$$

$$=0 \quad (k>\Lambda_{\alpha})$$

根据定理4.3.4和4.3.5李代数（群）g的任一不可约表示可以用$a_{\alpha_i}(\alpha\in\Pi)$，$(i=1,2,\cdots,l)$来标记。因为$l$个素根仅仅相应权$\Lambda$的分量$a_{\Lambda i}$也只能有$l$个分量，所以，通常把这些数$a_{\alpha i}$写在相应的邓金图上。所有的$a_{\alpha i}(i=1,2\cdots,l)$都是0对应于李代数（群）的表示是恒等表示。

例 A_2代数（$SU(3)$群）。因为它的秩$l=2$，所以它的不可约表示以二个数$(a_{\alpha 1},a_{\alpha 2})$表征。即



设表示的首权是$\Lambda=\xi_1\alpha_1+\xi_2\alpha_2$，则由（4.3.1）式，

$$a_{\alpha 1}=2(\Lambda\alpha_1)/(\alpha_1\alpha_1),\quad a_{\alpha 2}=2(\Lambda\alpha_2)/(\alpha_2\alpha_2)$$

$\because \quad (\Lambda\cdot\alpha_1)=\zeta_1(\alpha_1\alpha_1)+\zeta_2(\alpha_2\alpha_2)$

$\therefore \quad a_{\alpha 1}=2\zeta_1+\zeta_2\cdot 2\cdot(\alpha_2\cdot\alpha_1)/(\alpha_1\cdot\alpha_1)=2\zeta_1-\zeta_2$ (4.3.2)

其中$2(\alpha_2\cdot\alpha_1)/(\alpha_1\alpha_1)=-1$

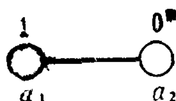
同理可得 $\quad a_{\alpha_2}=-\zeta_1+2\zeta_2$ （4.3.3）

由（4.3.2）和（4.3.3）两式，得到：

$$\zeta_1=(2a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2})/3 \qquad \zeta_2=(a_{\alpha_1}+2a_{\alpha_2})/3$$

$$\Lambda=(2a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2})/3\cdot\alpha_1+(a_{\alpha_1}+2a_{\alpha_2})/3\cdot\alpha_2 \tag{4.3.4}$$

例 设 $a_{\alpha 1}=1$ $\quad a_{\alpha 2}=0$。对应图是



则这个不可约表示的首权是 $\quad \Lambda=2\alpha_1+\alpha_2/3$。

§4 权系的计算

由李代数（或李群）的不可约表示 Λ的首权 Λ出发，可计算出不可约表示 Λ 的 所有的权，而得到不可约表示Λ的权系（$\triangle_\Lambda$）。这是一件有实用意义的事。为了计 算不 可约表示Λ的权系，下面叙述一些专门术语和定理。

如果一个权 $M\in\triangle_\Lambda$，可以由首权 Λ经过减去 K个素根所得到，那么就说M属$\triangle_\Lambda$的第 K 层$\triangle_\Lambda^{(k)}$。显然 ，首权

Λ属于第零层$\triangle_\Lambda^{(0)}$，最低权属于T_Λ层$\triangle_\Lambda^{(T_\Lambda)}$。于是

$$\triangle_\Lambda=\triangle_\Lambda^{(0)}\cup\triangle_\Lambda^{(1)}\cup\triangle_\Lambda^{(2)}\cup\cdots\cup\triangle_\Lambda^{(T_\Lambda)} \tag{4.4.1}$$

整数T_Λ叫作不可约表示的高。

用$S_k(\Lambda)$表示第k层$\triangle_\Lambda^{(k)}$的权的多重数。显然，不可约表

*一般图中$a_{\alpha_i}=0$时，相应“0”可不写。

示A的维数N为

$$N=1+S_1(A)+S_2(A)+\cdots+ST_h(A)\cdots+ST_A(A) \quad (4.4.2)$$

整数 $$m_A=\max S_h(A) \qquad (4.4.3)$$

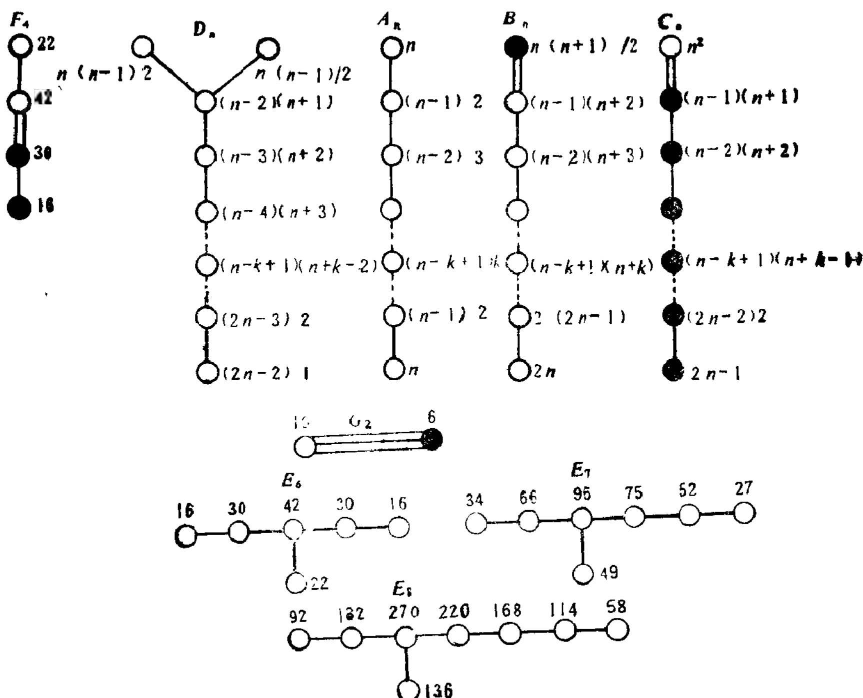
叫作不可约表示A的宽。

定理4.4.1 如果A是李代数g（李群G）的不可约表示A的首权，那么不可约表示A的高是：

$$T_A=\sum r_i a_{\alpha i} \qquad (4.4.4)$$

其中r_i由表(2)给出。

表（2）（4.4.4）式中的r值



定理4.4.2 李代数g（李群G）的不可约表示A的权系Δ是呈纺锤形的，即有

$$S_h(A)=S_{T_A-h}(A) \tag{4.4.5}$$

和 $S_h(A)\geqslant S_{h-1}(A)\geqslant\cdots\geqslant S_1(A)\geqslant 1$

其中 $h=\begin{cases} T_A/2 & T_A=\text{偶数} \\ (T_A-1)/2 & T_A=\text{奇数}\end{cases}$

推论：李代数g（李群G）的不可约表示A的权系Δ_A的宽m_A由下式定出

$$m_A=S_h(A) \qquad T_A=2h$$
$$=S_{h+1}(A) \qquad T_A=2h+1$$

定理4.4.3 设李代数g(李群G)不可约表示为A。如果已经知道$\Delta_A^{(0)}\Delta_A^{(1)}\cdots\cdots\Delta_A^{(h-1)}$，各层次中的权，那么

$$M-\alpha\in\Delta_A^{(h)},\quad \alpha\in\Pi,\quad M\in\Delta_A^{(h-1)}$$

的充要条件是
$$M_\alpha+q\geqslant 1 \tag{4.4.6}$$

其中q值由下述序列定出，即

$$M+\alpha,\ M+2\alpha,\ \cdots,\ M+q\alpha \tag{4.4.7}$$

是权，而$M+(q+1)\alpha$不是权。$M_\alpha=2(M\alpha)/(\alpha\alpha)$。

定理4.4.4 设李代数g（李群G）的不可约表示为A，则它的权M的多重数ν_M由下面递推公式定出：

$$\{(\Lambda+g,\ \Lambda+g)-(M+g,M+g)\}\nu_M$$
$$=2\sum_{\alpha>0}\sum_{K=1}^{\infty}(M+K\alpha,\alpha)\nu_{M+K\alpha} \tag{4.4.8}$$

其中α表示正根。

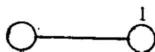
$$g=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha \tag{4.4.9}$$

定理4.4.5 李代数g（李群G）的不可约表示Λ的维数N为

$$N=\prod_{\alpha>0}\left[\frac{(\Lambda+g)\alpha}{(g\alpha)}\right]=\prod_{\alpha>0}\left(\frac{(\Lambda\alpha)}{(g\alpha)}+1\right) \tag{4.4.10}$$

其中g，α符号的意义和定理4.4.4相同。

例 求A_2代数的不可约表示的权系。



解：利用（4.3.4)式可得到首权 $\Lambda=(\alpha_1+2\alpha_2)/3$。再由表（4.4.1）可得不可约表示（01）的高$T_\Lambda=2a_{\alpha 1}+2a_{\alpha_2}=2\cdot 0+2\cdot 1=2$，因此共有三个层次。

现在，求出第一层$\Delta^{(1)}$的全部权。因为，$\Lambda\in\Delta^{(0)}$，所以

$$\Lambda=M\quad \Lambda_{\alpha 1}=M_{\alpha_1}=2(\Lambda\cdot\alpha_1)/(\alpha_1\alpha_1)$$

$$=2\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}\cdot\alpha_1\right)/(\alpha_1\alpha_1)$$

$$=\frac{2}{3}[(\alpha_1\cdot\alpha_1)+2(\alpha_1\cdot\alpha_2)]/(\alpha_1\alpha_1)$$

$$=\frac{2}{3}(1-1)=0$$

由（4.4.7）式写出序列

M，$M+\alpha_1$，$M+2\alpha_1$，…

而$\Lambda=M$，则Λ，$\Lambda+\alpha_1$，$\Lambda+2\alpha_1$…

因Λ是首权，故$\Lambda+\alpha_1$不是权 即$q=0$，因而$M\alpha_1+q=0+0=0<1$。不满足（4.4.6）式，所以$\Lambda+\alpha_1$不是权。

再求$\Lambda=M$

$\Lambda_{\alpha_2}=M_{\alpha_2}=2(\Lambda\alpha_2)/(\alpha_2\alpha_2)=\frac{2}{3}[(\alpha_1\alpha_2)+$

$2(\alpha_2\alpha_2)(\alpha_2\alpha_2))]=1$

利用（4.4.7）式写出序列：

$$M \qquad M+\alpha_2 \quad M+2\alpha_2\cdots$$

而$\Lambda=M$则$\Lambda \qquad \Lambda+\alpha_2 \quad \Lambda+2\alpha_2\cdots$

因Λ是首权，故$\Lambda+\alpha_2$不是权。即$q=0$。因而$M_{\alpha 2}+q=1+0=1$，满足（4.4.6）式。所以$\Lambda+\alpha_2$是权，那么$\Lambda+\alpha_2=(\alpha_1-\alpha_2)/3$是属于第一层$\Delta^{(1)}$的权。

接着再求第二层$\Delta^{(2)}$所有的权。由第一层$\Delta^{(1)}$的权$M=(\alpha_1-\alpha_2)/3$，知

$$M_{\alpha 1}=2(M\alpha_1)/(\alpha_1\alpha_1)$$
$$=\frac{2}{3}[(\alpha_1-\alpha_2)\cdot\alpha_1/(\alpha_1\alpha)]=1$$

利用（4.4.7）写出序列

$$M,\ M+\alpha_1 \quad M+2\alpha_1\cdots$$

而$M=\Lambda-\alpha_2$则$\Lambda-\alpha_2 \quad \Lambda-\alpha_2+\alpha_1 \quad \Lambda-\alpha_2+2\alpha_1\cdots$

$\Lambda-\alpha_2+\alpha_1$不是权，因为它不能写成首权与素根之差。所以$q=0$。故$M\alpha_1+q=1+0=1\geqslant 1$.由（4.4.6）式知$(M-\alpha_1)$是权，并等于$-(2\alpha_1+\alpha_2)/3$，它是属于第二层的权$\Delta^{(2)}$。

再求$M\alpha_2$.

$$M_{\alpha 2}=2(M_{\alpha 2})/(\alpha_2\alpha_2)$$
$$=\frac{2}{3}\left|\frac{(\alpha_1\alpha_1)-(\alpha_2\alpha_2)}{(\alpha_2\alpha_2)}\right|=-1$$

利用（4.4.7）式写出序列

$$M \qquad M+\alpha_2 \qquad M+2\alpha_2\cdots$$

而$M=\Lambda-\alpha_2$则$\Lambda-\alpha_2 \quad \Lambda-\alpha_2+\alpha_2 \quad \Lambda-\alpha_2+2\alpha_2\cdots$

因为Λ是首权，所以$\Lambda+\alpha_2$不是权。故$q=1$。由(4.4.6)式

$M\alpha_2+q=-1+1=0\leqslant 1$，不满足（4 3.6）式，所以 $M-\alpha_2=\Lambda-\alpha_1-\alpha_2$不是权。

因此权系△的高是$T_A=2$。这样就不必再作下去。结果A_2代数（$SU(3)$群）的不可约表示（0，1）的全部权是

$$
\begin{aligned}
&\cdot \quad (\alpha_1+2\alpha_2)/3 && \in \quad \Delta^{(0)} \\
&\cdot \quad (\alpha_1-\alpha_2)/3 && \in \quad \Delta^{(1)} \\
&\cdot \quad -(2\alpha_1+\alpha_2)/3 && \in \quad \Delta^{(2)}
\end{aligned}
\qquad (4.4.11)
$$

其宽$m_A=S_1(A)=1$。

因为该表示有三个权，所以我们知道此表示是三维的。

习 题

(1)求出A_2代数的表示  的权系。

(2)求出G_2代数的表示  的权系。

§5 直乘表示

半单李代数（群）的二个不可约表示的直乘仍是半单李代数（群）的一个表示。把直乘表示分解为不可约表示的直和。这在量子系统的耦合问题，强子的结构和分类问题中均有重要意义。

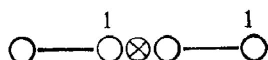
定理4.5.1 设表示C是半单李代数（群）的二个不可约表示A和B的直乘表示：

$$C=A\otimes B \qquad (4.5.1)$$

而且Λ_C，Λ_A，Λ_B分别是表示C、A、B的首权，

则 $$\Lambda_C=\Lambda_A+\Lambda_B \qquad (4.5.2)$$

例 考虑半单李代数A_2($SU(3)$群)的两个不可约表示

 直乘的分解。

利用（4.4.11）式，得：

$$\cdot(\alpha_1+2\alpha_2)/3 \quad \cdot(\alpha_1-\alpha_2)/3 \quad \cdot-(2\alpha_1+\alpha_2)/3 \quad \otimes \quad \cdot(\alpha_1+2\alpha_2)/3 \quad \cdot(\alpha_1-\alpha_2)/3 \quad \cdot-(2\alpha_1+\alpha_2)/3$$

$$(2\alpha_1+4\alpha_2)/3$$
$$(2\alpha_1+\alpha_2)/3 \qquad (\alpha_1+\alpha_2)/3$$
$$-(\alpha_1-\alpha_2)/3 \quad (2\alpha_1-2\alpha_2)/3 \quad -(\alpha_1-\alpha_2)/3$$
$$-(\alpha_1+2\alpha_2)/3 \qquad -(\alpha_1+2\alpha_2)/3$$
$$-(4\alpha_1+3\alpha_2)/3$$

我们已经知道A_2的不可约表示 ○——○（2） 的权是：

$$(2\alpha_4+4\alpha_2)/3$$
$$(2\alpha_1+\alpha_2)/3$$
$$(2\alpha_1-2\alpha_2)/3 \qquad (-\alpha_1+\alpha_2)/3$$
$$-(\alpha_1+2\alpha_2)/3$$
$$-(4\alpha_1+2\alpha_2)/3$$

因此 ○——○（1）⊗○——○（1） 含有不可约表示 ○——○（2）

所有的权，除了属于这个表示的权之外，剩下的权是

$\cdot\ (2\alpha_1+\alpha_2)/3$

$\cdot\ -(\alpha_1-\alpha_2)/3$

$\cdot\ -(\alpha_1+2\alpha_2)/3$

这对应于权为$(2\alpha_1+\alpha_2)/3$的表示。因此，直乘乘积中还含有表示 ，于是，我们得到：

因上述直乘分解法是很冗长的。尤其对维数很大的表示来说计算量是很大的。因此我们在稍后一点将介绍一个比较简便而实用的直乘分解方法——杨图。

§6 元表示的权

定义 如果$a_{\alpha i}$ $(i=1, 2, \cdots, l)$除了一个是1外，其它均是0。这个表示叫做基本表示。

例 C_3基本表示是：



定义 基本表示中相应的邓金图中端点是1的表示，叫作元表示。

例 C_3的元表示是



半单李代数（群）的素根可用元表示的权λ_i表示。

例 A_2代数（$SU(3)$群）的元表示是

它的权可求得：

$$\cdot (2\alpha_1+\alpha_2)/3=\lambda_1$$

$$\cdot (\alpha_2-\alpha_1)/3=\lambda_2$$

$$\cdot -(\alpha_1+2\alpha_2)/3=\lambda_3$$

解联立方程可以得到：

$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2$，$\alpha_2=\lambda_2-\lambda_3$。

下面用元表示的权λ_i来表出四个典型李代数和五个例外李代数的素根（见表3）。

用元表示的权 λ_i，可以给出 A_l，B_l，C_l，D_l四种典型李代数（群）的根：

$$\begin{array}{lll} A_l & \Sigma: & \{\lambda_p-\lambda_q\}_1^{l+1} \\ B_l & \Sigma: & \{\lambda_p, \pm\lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \\ C_l & \Sigma: & \{\pm 2\lambda_p, \pm\lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \\ D_l & \Sigma: & \{\pm\lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \quad (p\neq q) \end{array} \tag{4.6.1}$$

这里最后一个括号给出了p、q的取值范围，它们的正值和负值的各种组合都是允许的。

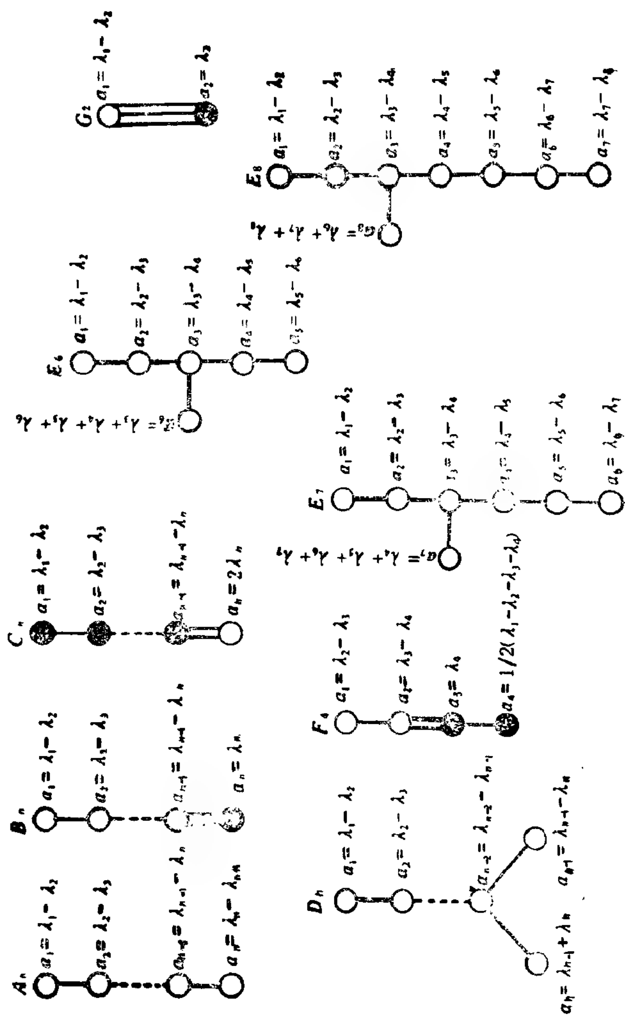
对应的正根是

$$\begin{array}{lll} A_l & \Sigma^+ & \{\lambda_p-\lambda_q\}_1^{l+1} \\ B_l & \Sigma^+ & \{\lambda_p, \ \lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \\ C_l & \Sigma^+ & \{2\lambda_p \ \ \lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \\ D_l & \Sigma^+ & \{\lambda_p\pm\lambda_q\}_1^l \qquad (p<q) \end{array} \tag{4.6.2}$$

用与例外李代数（群）同秩的子代数的元表示的权，邓金对例外李代数（群）的根进行了分类。因此，G_2，F_4，E_7，E_8的根可以分别用典型子代数A_2，B_4，A_7和A_8的根来表示，结果是：

$$G_2 \qquad \Sigma: \ \{\pm\lambda_p, \lambda_p-\lambda_q\}_1^3$$

表3



A_n
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$
$a_n=\lambda_n-\lambda_{n+1}$
B_n
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$
$a_n=\lambda_n$
C_n
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$
$a_n=2\lambda_n$
D_n
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_{n-2}=\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}$
$a_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$
$a_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n$
F_4
$a_1=\lambda_2-\lambda_3$
$a_2=\lambda_3-\lambda_4$
$a_3=\lambda_4$
$a_4=1/2(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)$
E_6
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_3=\lambda_3-\lambda_4$
$a_4=\lambda_4-\lambda_5$
$a_5=\lambda_5-\lambda_6$
$a_6=\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6$
E_7
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_3=\lambda_3-\lambda_4$
$a_4=\lambda_4-\lambda_5$
$a_5=\lambda_5-\lambda_6$
$a_6=\lambda_6-\lambda_7$
$a_7=\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7$
E_8
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2-\lambda_3$
$a_3=\lambda_3-\lambda_4$
$a_4=\lambda_4-\lambda_5$
$a_5=\lambda_5-\lambda_6$
$a_6=\lambda_6-\lambda_7$
$a_7=\lambda_7-\lambda_8$
$a_8=\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8$
G_2
$a_1=\lambda_1-\lambda_2$
$a_2=\lambda_2$

F_4 Σ: $\{\pm\lambda_p, \pm\lambda_p \pm \lambda_q, \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm\lambda_2 \pm\lambda_3 \pm\lambda_4)\}_1^4$

E_7 Σ: $\{\lambda_p-\lambda_q, \lambda_p+\lambda_q+\lambda_r+\lambda_s\}_1^8$ (4.6.3)

E_8 Σ: $\{\lambda_p-\lambda_q, \pm(\lambda_p+\lambda_q+\lambda_r)\}_1^9$

对E_6这个特殊情形，用子代数A_5+A_1给出：

E_6 Σ: $\{\lambda_p-\lambda_q, \pm 2\lambda, \lambda_p+\lambda_q+\lambda_r \pm \lambda\}_1^6$

(4.6.4)

这里，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_6$是$A_5$的元表示的权，而$\pm\lambda$是$A_1$的元表示的权。

为以后的计算方便，元表示的两个权的标积$(\lambda_i\lambda_j)$的值是：

对于B_l，C_l，D_l和F_4代数（群）：

$$(\lambda_p\lambda_q)=0 \qquad (p\neq q)$$

(4.6.5)

$$(\lambda_p\lambda_p)=k \qquad p=1,2,\cdots,l, k=\text{常数}$$

对于A_l，G_2，E_7和E_8代数（群）：

$$\sum_{p=1}^{l+1}\lambda_p=0$$

$$(\lambda_p\lambda_p)=lk \qquad p=1,2,\cdots,l+1 \qquad (4.6.6)$$

$$(\lambda_p\lambda_q)=-k \qquad (p\neq q)$$

对E_6李代数（群），除满足(4.6.5)式外，还有下列关系：

$$(\lambda_p\lambda)=0 \qquad p=1,2,\cdots,6$$

(4.6.7)

$$(\lambda\ \ \lambda)=3k \qquad k=\text{常数}$$

常数k由上述条件定出：

$$\sum_{a}(\alpha_p \alpha_q)=\delta_{pq} \tag{4.6.8}$$

故 $$\sum_{a}(\alpha\ \alpha)=l \tag{4.6.9}$$

这里，l是α中分量的个数。

利用(4.6.1)、(4.6.2)和(4.6.3)式，根可用元表示的权λ_i来表征；再用(4.6.5)—(4.6.8)式，把(4.6.8)式的左边表为k的一个倍数。由此，我们得到下列结果：

A_l	$k=1/2(l+1)^2$	G_2	$k=1/24$
B_l	$k=1/2(2l-1)$	F_4	$k=1/18$
C_l	$k=1/4(l+1)$	E_6	$k=1/144$
D_l	$k=1/4(l-1)$	E_7	$k=1/288$
		E_8	$k=1/540$

§7　不可约表示的标志

半单李代数（群）的不可约表示的标记是用不可约表示的首权Λ来标志。在邓金图的第k个顶点处附上分量a_k。邓金把一个不可约表示的首权Λ，写成

$$\Lambda=\sum c_k \Lambda_k \tag{4.7.1}$$

定义

$$a_k=a_{\alpha k}=2(\Lambda\alpha_k)/(\alpha_k\alpha_k)\begin{cases}k=1,2,3,\cdots,l\\ \alpha_k\in\Pi\end{cases} \tag{4.7.2}$$

由(4.6.1)式可得到：

B_l代数（群）　$$c_k=a_l/2+\sum_{i=k}^{l-1}\alpha_i \tag{4.7.3}$$

C_l代数（群）　$$c_k=\sum_{i=k}^{l}a_i \tag{4.7.4}$$

D_l代数（群） $c_k=(a_{l-1}-a_l)/2+\sum_{i=k}^{l-2} a_i$ （4.7.5）

F_4代数（群）
$$\begin{aligned} c_1&=a_1+2a_2+\frac{3}{2}a_3+a_4 \\ c_2&=a_1+a_2+a_3/2 \\ c_3&=a_2+a_3/2 \\ c_4&=a_3/2 \end{aligned} \qquad (4.7.6)$$

对于A_l、G_2、E_7和E_8代数，首权Λ可写成：

$$\Lambda=\sum_{k=1}^{l+1} c_k\lambda_k$$

并且满足 $$\sum_{k=1}^{l+1} c_k=0 \qquad (4.7.8)$$

由(4.6.1)—(4.6.3)式，可以得到：

A_l代数（群）
$$\begin{cases} c_k=c_{l+1}+\sum_{i=k}^{l} a_i \\ c_{l+1}=-\sum_{i=1}^{l} ia_i/l+1 \end{cases} \qquad (4.7.9)$$

G_2代数（群）
$$\begin{cases} c_1=a_1+a_2/3 \\ c_2=a_2/3 \\ c_3=-a_1-2a_2/3 \end{cases} \qquad (4.7.10)$$

E_7代数
$$\begin{cases} c_k=c_7+\sum_{i=k}^{6} a_i \\ c_7=a_7-a_4-2a_5-3a_6/4 \\ c_8=-(a_1+2a_2+3a_3) \\ \qquad -(9a_4+6a_5+3a_6+7a_7)/4 \end{cases} \qquad (4.7.11)$$

E_8代数
$$\begin{cases} c_k = c_3 + \sum_{i=k}^{7} a_i \\ c_8 = a_8 - 2a_2 - a_i/3 \\ c_9 = -(3a_1 + 6a_2 + 9a_3 + 12a_4 + 15a_5 + \\ \quad + 10a_6 + 5a_7 + 8a_8)/3 \end{cases} \qquad (4.7.12)$$

对于E_6代数，有

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{6} c_k \lambda_k + c\lambda \qquad (4.7.13)$$

$$\sum_{k=1}^{6} c_k = 0$$

$$\begin{cases} c_k = c_6 + \sum_{i=k}^{5} a_i \\ c_6 = -\sum_{i=1}^{5} i a_i/6 \\ c = a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 5a_4 + 5a_5 + a_6 \end{cases} \qquad (4.7.14)$$

例 A_l代数。

由 $$\Lambda = \sum_{p=1}^{l+1} c_p \lambda_p$$

$$a_j = 2(\Lambda\alpha_j)/(\alpha_j\alpha_j) = 2\left(\sum_{p=1}^{l+1} c_p\lambda_p\alpha_j\right)/(\alpha_j\alpha_j).$$

及$\alpha_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \qquad j = 1, 2, \cdots, l$

故 $(\alpha_j\alpha_j) = (\lambda_j - \lambda_{j+1}, \lambda_j - \lambda_{j+1}) = (\lambda_j\lambda_j) + (\lambda_{j+1}\lambda_{j+1}) - 2(\lambda_j\lambda_{j+1})$

利用(4.6.6)式 上式$= 2lk + 2k = 2(l+1)k$

$$分子=(\sum_{p=1}^{l+1} c_p\lambda_p,(\lambda_j-\lambda_{j+1}))=(\sum_{p=1}^{l+1} c_p(\lambda_p\lambda_j)-$$

$$-\sum_{p=1}^{l+1} c_p(\lambda_p\lambda_{j+1})=lkc_p\ \delta_p{}^j-\sum_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{l+1} kc_p - c_p\ \delta^{j+1}_p lk+$$

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq j+1}}^{l+1} c_p k$$

$$=k(c_j-c_{j+1})+lk(c_j-c_{j+1})$$

$$=(c_j-c_{j+1})(l+1)k$$

其中用了(4.6.6)式。所以，

$$a_j=2(l+1)k(c_j-c_{j+1})/2(l+1)k=c_j-c_{j+1}$$

$$a_{j+1}=(c_{j+1}-c_{j+2})$$

$$\vdots$$

$$a_l=(c_j-c_{l+1})$$

$$\sum_{i=j}^{l} a_j=(c_j-c_{l+1})$$

$$c_j=c_{l+1}+\sum_{i=j}^{l} a_i \qquad j=1,2,3,\cdots,l$$

又因为 $$\sum_{i=1}^{l+1} c_i=0$$

所以 $$c_1=c_{l+1}+\sum_{i=1}^{l} a_i$$

$$c_2=c_{l+1}+\sum_{i=2}^{l} a_i$$

$$\vdots$$

$$c_l = c_{l+1} + c_l$$

得到 $$c_1 + c_2 + \cdots + c_l = l c_{l+1} + \sum_{i=1}^{l} i a_i$$

由(4.7.8)式，我们得到：

$$-c_{l+1} = l c_{l+1} + \sum_{i=1}^{l} i a_i$$

$$-(l+1) c_{l+1} = \sum_{i=1}^{l} i a_i$$

最后得到结果 $$c_{l+1} = -\frac{1}{l+1} \sum_{i=1}^{l} i a_i$$

其它(4.7.10)—(4.7.14)式，都可以仿此例算出。

§8 不可约表示的维数

如果Λ是半单李代数（群）的一个首权为Λ的不可约表示，Λ的维数$N(\Lambda)$由下式给出：

$$N(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{(\Lambda + g, \alpha)}{(g\ \alpha)} \right) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\left(1 + \frac{(\alpha\ \Lambda)}{(g\ \alpha)}\right) \right) \tag{4.8.1}$$

这里 $$g = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha^+ \tag{4.8.2}$$

是正根 α^+的和的一半。

对每一个素根 α，

$$g_\alpha = 2(g\ \alpha)/(\alpha\ \alpha) = 1 \quad （证略） \tag{4.8.3}$$

于是我们可以写出：

$$g=\sum_i g_i\lambda_i \tag{4.8.4}$$

其中λ_i是元表示的权。对于A_l代数来说 $i=1,2,\cdots,l+1$，对于其它代数来说$i=1,2\cdots l$。

用上一节的同一方法，可以求出各个代数的g_i值。现列举于如下：

$A_l\quad g_i=l/2-i+1$

$B_l\quad g_i=l-i+1/2$

$C_l\quad g_i=l-i+1$

$D_l\quad g_i=l-i$

$G_2\begin{cases}g_1=4/3\\ g_2=1/3\\ g_3=-5/3\end{cases}\qquad F_4\begin{cases}g_1=11/2\\ g_2=5/2\\ g_3=3/2\\ g_4=1/2\end{cases}$

$E_6\begin{cases}g_i=(31-6i)/6\ (i\leqslant 5)\\ g_6=-5/2\\ g=20\end{cases}\qquad E_7\begin{cases}g_i=23-4i/4\quad (i\leqslant 7)\\ g_8=-49/4\end{cases}$

$$E_8\begin{cases}g_i=22-3i/3\qquad i\leqslant 8\\ g_9=-68/3\end{cases} \tag{4.8.5}$$

利用（4.7.1）和（4.8.2）式，可以得到各个代数的维数公式分别如下：

A_l代数
$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right) \tag{4.8.6}$$

B_l,C_l代数
$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p}{g_p}\right)\prod\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\times$$
$$\times\prod\left(1+\frac{c_p+c_q}{g_p+g_q}\right) \tag{4.8.7}$$

D_l代数
$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\left(1+\frac{c_p+c_q}{g_p+g_q}\right) \tag{4.8.8}$$

G_2代数

$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p}{g_p}\right)\prod\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)$$

(4.8.9)

F_4代数

$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p}{g_p}\right)\prod\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{c_p+c_q}{g_p+g_q}\right)\prod\left(1+\frac{c_1\pm c_2\pm c_3\pm c_4}{g_1\pm g_2\pm g_3\pm g_4}\right)$$

(4.8.10)

E_6代数

$$N=\left(1+\frac{c}{g}\right)\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\times$$

$$\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p+c_q+c_r+c/2}{g_p+g_q+g_r+g/2}\right) \qquad (4.8.11)$$

E_7代数

$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\times$$

$$\prod_{1}^{7}\left(1+\frac{c_p+c_q+c_r+c_s}{g_p+g_q+g_r+g_s}\right) \qquad (4.8.12)$$

E_8代数

$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)\times$$

$$\prod_{pq}\left(1+\frac{c_p+c_q+c_r}{g_p+g_q+g_r}\right) \qquad (4.8.13)$$

其中p、q、r、s指标取遍所有$(r-l)/2$个正根数值，但p、q、r、s对一种组合的所有置换只计算一次。

例　A_2代数的维数公式是：

$$N=\frac{1}{2}(1+a_1)(1+a_2)(1+(a_1+a_2)/2)$$

因为A_2代数的正根数是$(r-l)/2=(\delta-2)/2=3$，所以p、q值取作1、2、3。

用公式（4.8.6）式：

$$N=\prod_{p,q}\left(1+\frac{c_p-c_q}{g_p-g_q}\right)=\left(1+\frac{c_1-c_2}{g_1-g_2}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{c_2-c_3}{g_2-g_3}\right)\left(1+\frac{c_3-c_1}{g_3-g_1}\right)$$

利用（4.7.9）式，可以得到：

$$c_1-c_2=(a_1+a_2)+c_3-a_2-c_3=a_1$$

再由（4.8.5）式，得到

$$g_1-g_2=\frac{1}{2}-1+1-\left(\frac{1}{2}-2+1\right)=1$$

同理可以得到　　$c_2-c_3=a_2$　　$c_3-c_1=-(a_1+a_2)$

$g_2-g_3=1$　　$g_3-g_1=-2$

所以　　$N=[(1+a_1)(1+a_2)(1+(a_1+a_2)/2)]$

A_2代数$N(a_2a_1)$是：

$N(00)=1$,　　$N(01)=N(10)=3$,

$N(20)=N(02)=6$

$N(11)=8$　　$N(21)=N(12)=15$

$N(22)=27$　　$N(30)=N(03)=10$

§9　杨图及A_l代数直乘表示的约化

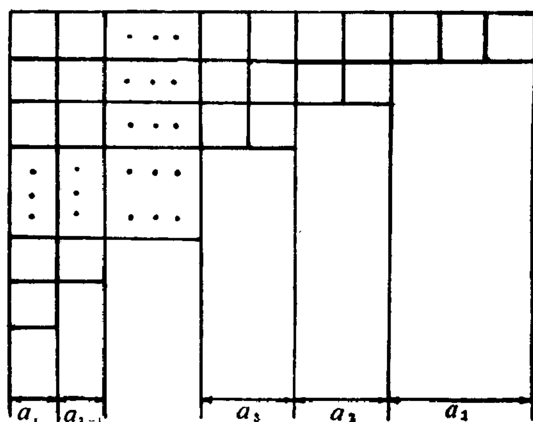
杨图简介。

一个方块代表一个表示对象。一行方块代表各表示的对

象的对称组合。例 $\boxed{i}\boxed{k}$ 代表一个对称态。

一列方块代表各表示对象的反对称组合。例 $\begin{array}{|c|}\hline i\\\hline k\\\hline\end{array}$ 代表一个反对称态。除了单行或单列外，还有各种行列组合，例 等等，它们表示混合对称组合或代表一个混合对称态。

半单李代数（群）A_l的不可约表示由首权 Λ 标记。而 Λ是由$(a_1,a_2,\cdots,a_l)$一组整数标记。整数$(a_1,a_2,\cdots,a_l)$和杨图有如下关系：



例如，半单李代数（群）A_2($SU(3)$群)，由一对数(a_1 a_2)来表征A_2代数的一个不可约表示．以(12)为例，相应的杨图是：



对A_l代数，某一个不可约表示$\Lambda(a_1, a_2, \cdots, a_l)$相对应某一杨图。即一个杨图代表某一个不可约表示。这样，我们在§5中所讲到两个不可约表示的直乘约化可用两个杨图的直乘约化来表示。下面我们就讲两个杨图直乘约化的规则。

i)两个不可约表示A和B，相应的杨图分别是$[f]$和$[g]$。

ii)把字母a填满$[g]$中第一行中所有的格子，字母b填满$[g]$中第二行……。

iii)把杨图$[g]$中第一行中所有a的方块和杨图$[f]$拼凑，并且要满足下列条件：

①每个杨图同一列中不能有2个以上的相同字母出现；

②拼凑后所得各图是标准杨图*。

iv)任一杨图由第一行开始。由左向右，从上到下任一方块处割开，不准b标号的方块数目超过a标号的方块数目。

例：

由(ii)点①，杨图 和 应舍去。

由(iv)点最后可得：

* 标准杨图是第$i+1$行(列)格子数不能超过第i行(列)的格子数。

最后上述拼凑后所得杨图的列的方块数是$(l+1)$个，则此列应舍去。

再举一例，A_3代数($SU(4)$群)的直乘表示的约化。

1. A_3代数的两个不可约表示(100)和(100)，考虑表示$(100)\times(100)$的约化。

两个不可约表示(100)和(100)相应杨图是□，则直乘表示

□ × [a] = [| a] + [/ a]*

即是 $(100)\times(100)=(200)+(010)$

相应维数是 $4\times4=10+6$

2. A_3代数两个不可约表示分别是(100)和(001)，相应杨图是□和(三格竖列)。考虑直乘表示□ × (三格竖列)的约化。

□⊗(三格竖列) = (两列杨图) + (四格竖列)

$(100)\otimes(001)=(101)+(000)$

相应维数是 $4\times\bar{4}=15\oplus\bar{1}$

§10 应用

半单李代数或李群在物理学中有广泛的应用。这节中，主要把A_1，A_2及A_3代数（群）用于基本粒子物理学中强子

* A_l代数用杨图求维数公式见附录二。

的分类。

实验指出，需要二类不同性质的参量来描述强子，一类是时空参量：例如自旋J，宇称p，质量m…等。它们都是强相互作用理论在某种时空变换群下的守恒量，或它们是某种守恒算符的本征值，我们把这类参量叫作外参量。另一类是内禀参量：例如电荷q，重子数B，同位旋I、I_3，奇异量子数S，超荷Y，粲数C…等。它们都是强相互作用理论在某种非时空变换群下的守恒量，或它们也是某种守恒算符的本征值，我们把这类参量叫作内参量。

上述参量并非都是线性无关的。例如，我们发现在外参量之间有

$$m^2=(J-J_0)\alpha^{-1}$$

其中 α是Regge迹线的斜率。

$$\alpha^{-1}\approx 1\text{GeV}^2 \tag{4.10.1}$$

内参量之间有

$$q=I_3+\frac{1}{2}(Y+C) \qquad \text{盖尔曼-西岛关系} \tag{4.10.2}$$

其中　　$Y=S+B$。

A_1代数（$SU(2)$群）是一个$r=3$，$l=1$的么正么模群。它的三个生成元就是同位旋I的三个分量I_1，I_2，I_3。强相互作用理论是核力理论的一个自然扩充。因此如果要求强相互作用理论在忽略Y、C的作用时应化为$SU(2)$群变换下的不变理论，一个极自然的选择是我们在强相互作用理论中所找寻的对称变换群（即不忽略Y，C作用）应该是$SU(4)=A_3$代数。当忽略粲数C的作用时，对称变换群应该就是$SU(3)=A_2$代数。总之，强子物理学的内禀对称性是$SU(2)$，$SU(3)$，$SU(4)$的对称性。

现在，我们分别简述强子的$SU(3)$和$SU(4)$的对称性。

1.强子的$SU(3)$对称性。1961年左右盖尔曼和尼埃曼提出把A_2代数($SU(3)$群)看作强子物理学的一个对称变换群。这是一个8阶2秩的幺正幺模群。有二个可对易的算符$H_1=I_3$，$H_2=Y$。而权矢量$\bar{A}=(I_3\ Y)$由同位旋第三分量和超荷组成。

在内、外参量之间有下列重要的关系，这就是所谓质量公式

$$m=m(J^P,I,Y,C) \tag{4.10.3}$$

或盖尔曼-大久保公式

$$m=a+bY+C[\frac{1}{4}Y^2-I(I+1)]$$

式中a,b,c是三个由实验决定的待定参数。

由于有这个关系，通常只须采用外参量J^P和三个独立的内参量I_3,Y,C。就可以对强子进行分类。

考虑J^P相同（即时空参量相同）而三个内参量I_3,Y,C不同的介子或重子的各种强子态。按量子论普遍原理，应把J^P相同的强子态看作三个可对易线性无关算符$\hat{I}_3$、$\hat{Y}$和$\hat{C}$的公共本征态，其本征值即分别为I_3、Y和C。在忽略因I_3、Y、C的不同而引起的质量差异（百分误差是十分之几）的近似下，可以认为强相互作用理论在秩$l=3$的某个变换群作用下形式不变。或者这三个算符$\hat{I}_3$、$\hat{Y}$、$\hat{C}$应是强相互作用中的守恒算符。可以看出，强子物理学中的这个对称群就是$A_3=SU(4)$群。

在早期对核力的研究中，曾引入核力相互作用在$SU(2)$群的作用下保持不变，这是基于下述主要实验事实。

(1) 镜象核（核中质子数和中子数互换）的能级大致相等。例：

C^{11}　0, 1.90, 4.30, 4.85, 6.48……　(MeV)

B^{11}　0, 2.14, 4.46, 5.03, 6.75……　(MeV)

(2) 散射截面　σ_T^{PP}, σ_T^{np}, σ_T^{nn}在高能散射中大致相等。

例：
$$\frac{\sigma_T^{PP}-\sigma_T^{nn}}{\sigma_T^{PP}} \approx 4.2 \pm 2.5\%$$

实验中的差值可归于库仑作用的影响。

实验表明，核力（强作用）与电荷无关。因此忽略电磁作用后，核力理论中，质量相近的所谓电荷多重态(p, n)，(π^+, π^0, π^-)，(Ξ^0, Ξ^-)，$(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$，$(K^+, K^0)$…等可分别看作某一个算符的二重，三重简并态。而电磁作用正是解除这种简并的一个微忧。在量子力学中，当哈密顿量或薛定格方程把转动群(R_3)当作对称群时，作为转动群(R_3)的不可约表示的量子系统应是转动群(R_3)的卡塞米尔算符J^2（总角动量）的本征态。这种能量的角动量的公共本征态是J^2算符的$(2J+1)$重简并态。

与此类似，引入算符I^2，把上述的电荷多重态看作是$2I+1$　重简并态。也就是说，对核子(P, n)，$I=1/2$；对介子(π^+, π^0, π^-)，$I=1$…。核力与电荷无关，要求能级，质量…等的本征态应是能量和算符I^2的公共本征态，它们是$(2I+1)$重简并的。从群论观点看，我们在核力理论中引入一个与转动群(R_3)同构的$SU(2)$群作为对称变换群，I^2就是$SU(2)$ 群的卡塞米尔算符。$SU(2)$群可叫作〈同位旋空间〉的转动群。

由欧氏空间中的转动不变性可得到角动量守恒和能级；

角动量量子数的$(2J+1)$重简并。类似地由同位旋空间的各向同性可得到同位旋守恒和能级（质量）对同位旋量子数的$(2I+1)$重简并。

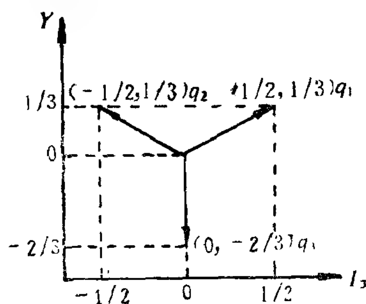


图 3

考虑$SU(3)$的基本表示(10)，它的权图如图3所示。可对易算符是$\hat{I}_3$、$\hat{Y}$，相应的本征态由本征值I_3和Y值来标记。当图3中纵轴是Y而横轴是I_3，三个权矢量λ_1、λ_2、λ_3分别和$|I_3=\frac{1}{2},Y=1/3>$、$|I_3=-\frac{1}{2},Y=\frac{1}{3}>$、$|I_3=0,Y=-\frac{2}{3}>$相重合。则由二个量子数$(I_3Y)$所表征的三个本征态正是代表构成强子的三个基本粒子，即夸克粒子。

现考虑$SU(3)$的另一个基本表示(0 1)，则三个权矢量λ_1、λ_2、λ_3分别与$|I_3=-\frac{1}{2},Y=-\frac{1}{3}>$、$|I_3=\frac{1}{2},Y=-\frac{1}{3}>$、$|I_3=0,Y=\frac{2}{3}>$三个本征态相重合，它们正是代表三个反夸克粒子。

我们求上述两个基本表示的直乘表示。由前节的约化知，可以分解为下列不可约表示的直和。

$$(10)\otimes(01)=(11)\oplus(00) \qquad (4.10.4)$$

相应的维数是 $3\otimes\bar{3}=8\oplus1$

而$(10)\otimes(10)\otimes(10)$的直乘表示，则可分解为下列不可约表示的直和

$$(10)\otimes(10)\otimes(10)=(30)\oplus(11)\oplus(11)\oplus(00)$$

相应的维数是 $3\otimes3\otimes3=10\oplus8\oplus8\oplus1$ (4.10.5)

(4.10.4)式表明，两个基本表示的直乘可得二个不可约表示。其中一个是一维的，只有一个权矢量代表一个本征态——单态。另一个是8维的，有8个权矢量表示8个本征态即八重态。如果两个基本表示的对象分别是夸克和反夸克，则上述单态和八重态的表示对象应是由正反夸克对所组成的复合粒子，这正是介子。

与此相类似，(4.10.5)式表明，它有一个单态，两个八重态和一个十重态。它们的表示对象应看作由3个夸克所组成的复合粒子，这正是核子。

可见的确可以把$A_2=SU(3)$群当作强子物理学的对称群。

强子物理学中还有一种对称变换群是$SU(4)$群。它有3个可对易的算符，相应的本征态分别由量子数I_3，Y，C来标记。两个基本表示分别为(100)和(001)，它们都是四维表示分别代表构成强子的四个基本粒子——夸克粒子。

如果仍认为介子由正反夸克粒子对所组成，重子由三个夸克粒子组成。由$SU(4)$群两个基本表示所构成的直乘表示的分解：

$$4\otimes\bar{4}=1\oplus15 \qquad (4.10.6)$$

和由三个基本表示(100)所构成的直乘表示的分解

$$4\otimes4\otimes4=20\oplus20'\oplus20'\oplus4^{*} \qquad (4.10.7)$$

可得出结论：

介子族除单态外应有15重态。重子族应有全对称20重态，混合对称20重态和全反对称的4重态。

如果强子世界严格遵守$SU(3)$ （或$SU(4)$, $SU(6)$）内

部对称性，那么应有：

（1）一切强子可以看作 $SU(3)$（或$SU(4)$，$SU(6)$），基本表示对象（夸克）的直乘约化表示对象；

（2）同属于某个 $SU(3)$（或$SU(4)$，$SU(6)$）不可约表示的强子组成一个 $SU(3)$（或$SU(4)$，$SU(6)$）的多重态，同一多重态内强子的时空属性应完全相同（指m，J^P），但不同的多重态的外参量可以不同。

基本粒子物理学认为把强子分为外参量不同的 $SU(3)$（或$SU(4)$，$SU(6)$）多重态是超强作用。而强作用具有对称群 $SU(3)$（或$SU(4)$，$SU(6)$）。因而属同一个$SU(3)$的八重态内的强子质量应是8重简并的。但事实上属同一个$SU(3)$的8重态内强子的质量是分裂的，这应归于二种引起$SU(3)$对称性破缺的力。即：中强相互作用，它对超荷Y和同位旋I解除简并，和电磁相互作用它对同位旋I_3解除简并。

对于中强相互作用引起的质量分裂有盖尔曼-大久保公式：

$$m=a+bY+c[I(I+1)-\tfrac{1}{4}Y^2]$$

或

$$m^2=J-(a+b+cY+\frac{bc}{a}IY)^*$$

最后应提到，按量子色动力学，强子是由带"色"自由度的一些（例6种）夸克组成的。"色"分三种，如果要求夸克的拉氏量满足色$SU(3)$群的局部对称性，那么可以自然得出传递夸克之间相互作用的中介场是胶子场。近十年来，量子色动力学已经作为一门反映强子结构及其相互作用的动力学理论

* 见北京师范大学学报1978年第3期，刘辽"强子质量的一个经验公式"（1973）。

取得了迅速的发展，而它的对称群就是色$SU(3)$群。

参考文献

(1) 万哲先：《李代数》

(2) B.G.Wybourne：《*Classical groups for p   icists*》

(3) R.Gilmore：《*Lie groups, Lie ALgebras and some of their Applications*》

第五章　转动群和洛仑兹群

§1　引　言

保持4维空间内距离（长度）不变的线性群是$U(4)$，它是一个复4维的幺正群。$SU(4)$群（A_3代数）是它的一个子群。但是$SU(4)$群的生成元李代数不是$U(4)$的理想。

O_4群是一个实4维正交群。转动群R_4是它的一个不变子群，即D_2群。

L群是广义洛仑兹群。由狭义相对论知，若引入闵可夫斯基时空

$$x_1=x,\ \ x_2=y,\ \ x_3=z,\ \ x_4=ict,$$

则保持4维时空内任二个世界点（即事件）间的距离不变的最普遍的齐次变换群包括：特殊洛仑兹变换、空间转动、空间反射，时间反演及其它各种可能的组合。按狭义相对论要求，齐次变换

$$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu\quad(\mu,\ \ \nu=1,2,3,4)\tag{5.1.1}$$

的矩阵元$\alpha_{\mu\nu}$应满足坐标的实数性条件：即α_{ik}是实数，α_{i4}和α_{4i}是虚数（$i,k=1,2,3$），α_{44}是实数。

对于庞加莱群：　　$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu+\beta_\mu$　　　　(5.1.2)

式中$\alpha_{\mu\nu}$即(5.1.1)式中的$\alpha_{\mu\nu}$，而β_μ是常数。

注意到，这四种群一般不一定是连通的紧致李群，仅$U(4)$群的子群$SU(4)$和O_4群的子群R_4才是在上一章中研究过的二种典型群（代数）。而在物理学中极其重要的三个

群，即转动群R_3，广义洛仑兹群，庞加莱群根本不是典型群。这正是本节的研究对象。

如果在$U(4)$群、O_4群和L群中，令$\alpha_{44}=1$，$\alpha_{4i}=\alpha_{i4}=0$，则分别得到$U(4)$群、$O_4$群和$L$群的子群$U(3)$群，$O(3)$群。其中$O(3)$群有一个不变子群$R_3$，即是熟知的三维空间转动群，它在基本粒子的自旋和同位旋理论中有着重要的意义。上述分析表明，$O(4)$群、L群都含有不变的非阿贝尔子群，而转动群R_3则是一个半单李群。

§2 群的生成元和对易关系

从上节所述的线性群中去掉反射或反演变换后的群叫作固有群。分别以U_{4p},O_{4p}和L_p等表示。显然它们仍是一个群。实际上，O_{4p}群就是4维转动群，L_p就是含有特殊洛仑兹变换和纯空间转动变换的固有洛仑兹群。

一、4维转动群(R_4)　该群的无穷小变换是

$$x'_\mu=(\delta_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})x_\nu \tag{5.2.1}$$

其中　$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$

仅有6个独立参量，如果以$\alpha_i(i=1,2,3,\cdots,6)$来表示这6个参量，由

$$(x)=(I+\alpha_i I_i)(x) \tag{5.2.2}$$

可以得到R_4群的6个生成元。习惯上写成：

$$A_i(i=1,2,3)\text{表示}I_i(i=1,2,3)$$

$$B_i(i=1,2,3)\text{表示}I_i(i=4,5,6)$$

利用(5.2 1)式

$$u_{\mu\tau}=\frac{\partial f_\mu}{\partial \alpha_\tau}=\frac{\partial e_{\mu\nu}}{\partial \alpha_\tau}x_\nu$$

$$\therefore \quad I_\rho=u_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{5.2.3}$$

由上式，R_4群的生成元的微分形式为

$$\begin{cases} A_1=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3} & A_2=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \\ A_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2} & \\ B_1=x_1\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_1} & B_2=x_2\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_2} \\ B_3=x_3\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3} & \end{cases} \tag{5.2.4}$$

相应的矩阵形式是：

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.5}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned} [A_i,\ A_j] &= -\varepsilon_{ijk}A_k \\ [B_i,\ B_j] &= -\varepsilon_{ijk}A_k \\ [A_i,\ B_j] &= -\varepsilon_{ijk}B_k \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

引入记号

$$J_i=(A_i+B_i)/2i \qquad K_i=(A_i-B_i)/2i \qquad (5.2.7)$$

则(5.2.6)式可写成：

$$[J_i,\ J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k$$
$$[K_i,\ K_j]=i\varepsilon_{ijk}K_k \qquad (5.2.8)$$
$$[K_i,\ J_k]=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,2,3)$$

由此可见，J_i、$K_i(i=1,2,3)$分别构成一4维李代数中的3维子代数，或J_i、$K_i(i=1,2,3)$分别是4维转动群R_4的二个3维转动子群R_3的生成元。(5.2.8)式中最后一式表明，每个3维子代数都是R_4代数的理想。但它们都是非阿贝尔理想。因此R_4代数是半单的。又R_4代数中任一元素可表为上述二个理想中元素的线性组合，所以R_4代数可表为上述两个子代数$SO(3)$)的直和。或李群$SO(4)$局部同构于直积群$SO(3)\otimes SO(3)$。

若在(5.2.2)式中选取$\varepsilon_{\rho\sigma}$为参量，则相应的生成元应以$I_{\rho\sigma}$标记。因此(5.2.2)式变为

$$x_\mu'=(\delta_{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma,\mu\nu})x_\nu \qquad (5.2.9)$$

由于$\varepsilon_{\rho\sigma}=-\varepsilon_{\sigma\rho}$，可令$I_{\rho\sigma}=-I_{\sigma\rho}$。这样，独立生成元还是6个，由(5.2.1)式和(5.2.9)式可以得到：

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma,\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (5.2.10)$$

由$(\varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}=2\varepsilon_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu}-\varepsilon_{\nu\mu}$可得

$$(\varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}=\varepsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\varepsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}$$

因此

$$I_{\rho\sigma,\mu\nu}=\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu} \qquad (5.2.11)$$

故
$$[I_{\alpha\beta},I_{\gamma\delta}]=-\delta_{\alpha\gamma}I_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}I_{\beta\gamma}+\delta_{\beta\gamma}I_{\alpha\delta}-\delta_{\beta\delta}I_{\alpha\gamma} \qquad (5.2.12)$$

此式就是(5.2.6)和(5.2.8)两式的统一表述。

由(5.2.8)式知（应注意的是结构常数应为常数，因此(5.2.8)式中J_k应非厄米化后才可以用。如何非厄米化留作习题），度规张量：

$$g_{ik}=C_{i\mu}^{\ \nu}C_{k\nu}^{\ \mu}=\varepsilon_{i\mu\nu}\varepsilon_{k\nu\mu}=-\alpha_i\delta_{ik}$$

因此可以构成二个卡塞米尔算符。即

$$J^2=g^{ik}J_iJ_k=J_1^2+J_2^2+J_3^2=A_iA_i+B_iB_i-2A_iB_i \tag{5.2.13}$$

$$K^2=g^{ik}K_iK_k=K_1^2+K_2^2+K_3^2$$
$$=A_iA_i+B_iB_i-2A_iB_i \tag{5.2.14}$$

或等效地表为

$$F=J^2+K^2=A_iA_i+B_iB_i,\quad G=K^2-J^2=A_iB_i \tag{5.2.15}$$

它们与R_4群的全部生成元都可对易。由舒尔引理知道，对于R_4群的不可约表示J^2，K^2或F，G应是一个数量矩阵。

R_4群是D_2李代数，它是一个秩$l=2$的半单李代数。因而应存在2个卡塞米尔算符的本征值来表征它的任一不可约表示。

二、固有洛仑兹群L_p

固有洛仑兹群L_p的生成元的微分形式为

$$A_1=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\qquad A_2=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$A_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{5.2.16}$$

$$B_1=-i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$B_2=-i\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{5.2.17}$$

$$B_3=-i\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

相应的矩阵形式是

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(5.2.18)

$$B_1=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\quad B_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}\quad B_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix}$$

式中A_i是子群R_3的生成元，B_i是特殊洛仑兹群的生成元。它们满足对易关系：

$$[A_iA_j]=-\varepsilon_{ijk}A_k$$
$$[B_iB_j]=\varepsilon_{ijk}A_k \qquad (5.2.20)$$
$$[A_iB_j]=-\varepsilon_{ijk}B_k$$

引入换元变换

$$J_i=(iA_i+B_i)/2=J_i^+ \qquad K_i=(iA_i-B_i)/2=K_i^+$$

它们的显示式是

$$J_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\quad J_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}$$

$$J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix}$$

和

$$K_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\quad K_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix}$$

$$K_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

则（5.2.20）式可写为

$$\begin{aligned}&[J_i J_j]=-i\in_{ijk}J_k\\&[K_i K_j]=-i\in_{ijk}K_k\\&[K_i J_k]=0\end{aligned}\qquad(5.2.21)$$

和R_4群相类似也有二个卡塞米尔算符。即

$$J^2=J_1^2+J_2^2+J_3^2=B^2-A^2+2iA\cdot B$$

$$K^2=K_1^2+K_2^2+K_3^2=B^2-A^2-2iA\cdot B$$

或等效地有

$$M^2=J^2+K^2=2(B^2-A^2)$$

$$N^2=4iA\cdot B$$

三、庞加莱群（非齐次洛仑兹群）

保持闵可夫斯基时空内距离不变的最一般的线性变换是庞加莱变换群$\wp$。

$$\chi_\mu'=\alpha_{\mu\nu}\chi_\nu+\beta_\mu$$

其中$\alpha_{\mu\nu}$是洛仑兹变换矩阵元。变换表示先进行洛仑兹变换，后进行平移变换。$\alpha_{\mu\nu}$应满足前述的坐标实数性条件，β_μ则应满足下述坐标实数性条件：

$$\beta_i\text{是实数}(i=1,\ 2,\ 3),\ \beta_4\text{是虚数}\qquad(5.2.22)$$

庞加莱群含有洛仑兹群L和平移群S的二个子群。可以证明它的二个子群L和S是不可对易的。即$LS\neq SL$。

庞加莱群有10个参量，故有10个生成元。这可选用固有洛仑兹群L_p的6个生成元和平移群S的4个生成元作为庞加莱群$\mathfrak{P}$的生成元。

固有洛仑兹群的6个生成元可选（5.2.11）中的$I_{\mu\nu}$。平移群S的4个生成元按下述方法决定。

对于平移群S的任一无穷小变换：

$$\chi_\mu' = \chi_\mu + \varepsilon_\mu \tag{5.2.23}$$

相应的态函数所产生的无穷小变化为

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \psi(x) + \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} d x_\mu = \psi(x) + \varepsilon_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi(x) \\ &= \left(1 + \varepsilon_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\psi(x) = (1 + \varepsilon_\mu I_\mu)\psi(x) \\ &= [1 + \varepsilon_\mu (iP_\mu)\psi](x)\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

显然（5. 2. 24）构成群，而且（5. 2. 24）是(5. 2. 22）的一个同态对应。因此（5. 2. 24）是平移群S的一个无穷小表示。相应的厄米算符$P_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$就是熟知的位移算符，前3个是动量算符，第4个是能量算符。

可以得到：

$$\begin{aligned}&[P_\mu P_\nu] = 0 \\ &[I_{\mu\lambda} I_{\nu\tau}] = i(g_{\lambda\nu} I_{\mu\tau} - g_{\mu\tau} I_{\lambda\tau} + g_{\mu\tau} I_{\lambda\nu} - g_{\lambda\tau} I_{\mu\nu}) \\ &[I_{\mu\nu} P_\tau] = i(g_{\nu\tau} P_\mu - g_{\mu\tau} P_\nu)\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

式中 $g_{tt} = -g_{xx} = -g_{yy} = -g_{zz} = 1$。可见平移群是庞加莱群的不变阿贝尔子群。因此庞加莱群不是半单群。

由庞加莱群的生成元可以构成二个卡塞米尔算符。即

$$P^2 = P_\mu P_\mu$$

$$W = -W_\lambda W_\lambda \quad (5.2.26)$$

其中 $W_\lambda = 1/2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu I_{\nu\rho}$

它们和10个生成元都可对易。可以证明，庞加莱群仅有二个独立的卡塞米尔算符。对于庞加莱群的任一不可约表示而言，P^2、W是数量矩阵。因此可用P^2，W二个算符的本征值来标志庞加莱群的任一不可约表示。如果认为基本粒子以庞加莱群的不可约表示来代表，则上述二个本征值可用来表征不同的基本粒子。

算符P^2的本征值是粒子的静质量：

$P^2 = -m_0^2$ （$m_0^2 > 0$ 慢子，$m_0^2 < 0$快子）（5.2.27）

我们可以证明，对于静止质量不为 0 的粒子，W的本征值决定粒子的自旋值。

证明：因为是静止的粒子（$m_0 \neq 0$），所以$P_1 = P_2 = P_3 = 0$，$P_4 = im_0$。

由（5．2．26)或$W_\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu I_{\nu\rho}$得：

$$W_\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda 4\nu\rho} P_4 J_{\nu\rho}$$

所以 $W = -W_\lambda W_\lambda = \frac{1}{4} m_0^2 \ \varepsilon_{\lambda 4\nu\rho}\varepsilon_{\lambda 4jk} I_{\nu\rho} I_{jk}$

$$= \frac{1}{4} m_0^2 4 \ (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = m_0^2 J^2 \quad (4.2.28)$$

因此W的本征值是$m_0^2 J(J+1)$，J是静止的粒子的自旋。基于上述理由，基本粒子可以用庞加莱群的不可约表示或（m_0，J）来表征。

目前，基本粒子物理学把庞加莱群作为对称群，因而每一个基本粒子都是庞加莱群的某种不可约表示的表示对象。

对于强子物理学，它还具有内部对称性。这就是说它把 $SU(3)$，$SU(4)$ 或$SU(6)$群作为对称群。结果是所有强子可看作3个，4个或6个夸克粒子的复合粒子。这些粒子构成内部对称群的一些不可约表示的多重态，每个多重态内的粒子在理论上它们质量应该是简并的。

§3 广义洛仑兹群L的构造

由广义洛仑兹群L的正交条件：$\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\rho}=\delta_{\lambda\rho}$可得

$$\alpha_{\mu4}\alpha_{\mu4}=\alpha_{i4}\alpha_{i4}+\alpha_{44}\alpha_{44}=1$$

由实数性条件　　$\alpha_{i4}\alpha_{i4}=-|\alpha_{i4}|^2$

因此　　$\alpha_{44}^2=1+|\alpha_{i4}|^2\geqslant1$

最后得　　$\alpha_{44}\geqslant1$　　或$\alpha_{44}\leqslant-1$

再考虑$\det\alpha=\pm1$，可见广义洛仑兹群L由互不连通的四个子集构成。即

$\det\alpha$ \ α_{44}	$\geqslant1$	$\leqslant1$
$+1$	$L_+\uparrow$	$L_+\downarrow$
-1	$L_-\uparrow$	$L_-\downarrow$

子集$L_+\uparrow$含有恒等变换，空间转动和特殊洛仑兹变换，它构成固有洛仑兹群（L_P），它是一种顺时的正洛仑兹变换所构成的一个群。

子集$L_-\uparrow$是一种顺时的纯空间反射变换，它不构成群。

集合 $L_+\uparrow+L_-\uparrow=L_f$构成全洛仑兹群。它是一种最普通的顺时洛仑兹变换所构成的群。

子集是$L_-\downarrow$时间反演变换，它不构成群。

子集$L_+\downarrow$是一种时空全反射变换，它也不构成群。

当然，$L_+\uparrow+L_-\uparrow+L_+\downarrow+L_-\downarrow=L$构成非连通的广义洛仑兹群。应当指出，狭义相对论仅断言，固有洛仑兹群L_P是物理世界的一个对称群。至于物理规律在其它广义洛伦兹变换中是否形式不变，狭义相对论不置可否，当由实验判定。

下面我们指出：（a）固有洛仑兹群L_P是广义洛仑兹群L的不变子群。

证：作对应

$$L_+\downarrow\Rightarrow e,\quad L_-\uparrow\Rightarrow\sigma,\quad L_-\downarrow\Rightarrow\tau,\ L_+\downarrow\Rightarrow\sigma\tau.$$

则集合$V=\{e,\ \sigma,\ \tau,\ \sigma\tau\}$构成一个群。其中$e$是单位元素。于是有 $L\sim L_P$，其中符号“$\sim$”表示同态对应。显然，$L_+\uparrow$是L的不变子群。而商群$L/L_P\approx V$，其中“$\approx$”表示同构对应。这表明，广义洛仑兹群L不是单群，但固有洛伦兹群L_P却是半单群。

（b）平移群S是庞加莱群$\mathfrak{L}$的不变子群。

证：任取$l\in\mathfrak{L}$满足$l^{-1}sl=s$。

其中l是$x_\mu'=\alpha_{\mu\lambda}x_\lambda+\beta_\mu$，$s$是$x_\mu''=x'_\mu+\gamma_\mu$，$l^{-1}$是

$$x_\tau'''=\alpha_{\tau\mu}^{-1}(x''_\mu-\beta_\tau)$$

故$x_\tau'''=\alpha_{\tau\mu}^{-1}(\alpha_{\mu\nu}x_\nu+\beta_\mu+\gamma_\mu-\beta_\tau)$

利用$\alpha^{-1}\alpha=I$，上式可化为

$$x_\tau'''=\delta_{\tau\nu}x_\nu+\delta_\tau=x_\tau+\delta_\tau\in s$$

这一点已在（5.2.25）中证明了。这说明庞加莱群既不是单群也不是半单群。

§4　4维正交群及其子群的表示

这节以后，如不另作声明，我们仅考虑齐次4维正交群。若有P个指标量$\psi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}x$在4维正交变换

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \qquad (5.4.1)$$

下，有下述变换规律

$$\psi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}(x) \rightarrow \psi'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}x'$$

$$= \alpha_{\mu_1\nu_1}\alpha_{\mu_2\nu_2}\cdots\alpha_{\mu_p\nu_p}\psi_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_p}x \qquad (5.4.2)$$

只要（5.4.1）是一个正交变换群，则（5.4.2）一定也是一个变换群。因此，正交变换群与变换群（5.4.2）之间建立了同态对应。易看出这事实上也是一个同构对应。显然这意味着：（5.4.2）式是正交变换群（5.4.1）的一个4^p维表示，这表示叫作4^p维张量表示，4^p维表示对象$\psi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}(x)$叫作$p$级张量。$p=0$时，$\psi'=\psi$，$\psi$叫作 0 级张量或标量。$p=1$时，$\psi'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\psi_\nu$，$\psi_\mu$叫作1级张量或矢量。$p=2$时，$\psi'_{\mu_1\mu_2} = \alpha_{\mu_1\nu_1}\alpha_{\mu_2\nu_2}\psi_{\nu_1\nu_2}$，$\psi_{\nu_1\nu_2}$叫作2级张量或简称张量。

不难证明：2个矢量表示的直积表示$\alpha\otimes\alpha$，是一个2级张量表示。P个矢量表示的直积表示$\alpha\otimes\alpha\otimes\cdots\cdots\otimes\alpha$（$P$个）是一个$P$级张量表示。表示对象的个数或表示空间的维数就是$4^P$。显然上述张量定义对任意$n$维正交变换均成立。

一、2级张量表示的约化

（1）任一2级张量表示对象或简称张量可如下约化

$$\psi_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \qquad (5.4.3)$$

相应维数是　　$16 = 10 \oplus 6$

这表明任一16维张量表示可约化为一个10维对称表示和

一个6维反对称表示的直和。

证：$\psi_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}(S_{\lambda\rho}+A_{\lambda\rho})$

$=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}S_{\lambda\rho}+\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}A_{\lambda\rho}=S'_{\mu\nu}+A'_{\mu\nu}$

显然　　$S_{\mu}{}'_{\nu}=S_{\nu}{}'_{\mu}$　　$A'_{\mu\nu}=-A'_{\nu\mu}$

因此，如果把16维表示空间的基底（表示对象）$\psi_{\mu\nu}$换成新基底$S_{\mu\nu}$（10）个和$A_{\mu\nu}$（6个），则16维表示空间可分为二个不变子空间，一个是10维，另一个是6维。16维表示在采用新基底后，就可约化为一个10维和一个6维表示的直和。我们注意到，上述分解对任何群的表示对象均可成立。

（2）10维对称表示可进一步约化为9维对称表示和1维表示的直和。

证明．引入 $\chi=\mathrm{Tr}S_{\mu\nu}$　　（5.4.5）

则　　$S_{\mu\nu}=(S_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu})+\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}=S^0{}_{\mu\nu}+\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}$

（5.4.5）

在正交变换下，$S_{\mu}{}'_{\nu}=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}S_{\lambda\rho}=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}(S^0{}_{\lambda\rho}+\frac{1}{4}\chi\delta_{\lambda\rho})$

$=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}S^0_{\lambda\rho}+\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}(\frac{1}{4}\chi\delta_{\lambda\rho})=S^{0\prime}_{\mu\nu}+\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}$

可见，$\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}$在正交变换下实际上是一个标量（1维）。

$\mathrm{Tr}S^{0\prime}_{\mu\nu}=S^{0\prime}_{\mu\mu}=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\rho}S^0_{\lambda\rho}=\delta_{\lambda\rho}S^0_{\lambda\rho}=S^0_{\lambda\lambda}=0$

这表明$S^{0\prime}_{\mu\nu}$在正交变换下是一个迹为0的2级对称张量(9维)。因此,如果以新基底$S^0{}_{\mu\nu}$,$\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}$代替旧基底$S_{\mu\nu}$,则10维表示空间可分解为二个不变子空间,即一个9维和一个1维。相应地10维表示可约化为9维不可约表示和1维不可约表示的直和。

（3）6维反对称表示也可进一步约化。引入4维列维－西维塔符号：

$$
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1 & \text{如果}(\mu,\nu,\rho,\delta)\text{为}(1,2,3,4)\text{的偶序}\\ -1 & \text{如果}(\mu,\nu,\rho,\delta)\text{为}(1,2,3,4)\text{的奇序}\\ 0 & \text{如果任二指标相同}\end{cases} \tag{5.4.6}
$$

则有

$$\varepsilon'_{\mu\nu\rho\sigma}=|\alpha|\,\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\tau}\alpha_{\rho\alpha}\alpha_{\sigma\beta}\varepsilon_{\lambda\tau\alpha\beta}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=4!$ 这是因为4个不同的数字共有4!种排列。

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}=3!\ \delta_{\mu\alpha}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}=2!\ (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}=1!\ (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\rho\gamma}-\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\rho\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\rho\gamma}+$$
$$+\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\rho\alpha}+\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\rho\beta}-\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\beta}\delta_{\rho\alpha})$$

对于反对称张量$A_{\mu\nu}$，它的对偶张量$A_{\mu\nu}{}^{D}$是：

$$A^{D}_{\mu\nu}=\frac{1}{2!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma} \tag{5.4.7}$$

$A^{D}_{\mu\nu}$有下列性质。

(a) $A^{D}_{\mu\nu}=-A^{D}_{\nu\mu}$，$(A^{D}_{\mu\nu})^{D}=A_{\mu\nu}$ (5.4.8)

(b) $A^{D}_{12}=A_{34}$，$A^{D}_{14}=A_{23}$，$A^{D}_{23}=A_{14}$

$A^{D}_{24}=A_{31}$，$A^{D}_{31}=A_{24}$，$A^{D}_{34}=A_{12}$

(c)如果$A_{\rho\sigma}$是张量，则$A^{D}{}_{\rho\sigma}$就是赝张量。因为列维－西维塔符号$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$是常量赝张量。$\varepsilon_{\mu\nu'\rho\sigma}=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$。

如果 $A^{D}_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}$ (5.4.9)

则$A_{\mu\nu}$叫作自对偶反对称张量。

如果 $A^{D}_{\mu\nu}=-A_{\mu\nu}$ (5.4.10)

则$A_{\mu\nu}$叫作反自对偶反对称张量。

(5.4.9)和(5.4.10)两式中仅有3个独立分量。

我们可以把$A_{\mu\nu}$写成

$$A_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(A_{\mu\nu}+A^D{}_{\mu\nu})+\frac{1}{2}(A_{\mu\nu}-A^D{}_{\mu\nu})=\mathscr{D}_{\mu\nu}+\mathscr{A}_{\mu\nu} \quad (5.4.11)$$

显然，有

$$\mathscr{D}_\mu{}^D{}_\nu=\mathscr{D}_{\mu\nu} \quad (5.4.12)$$

$$\mathscr{A}^D{}_{\mu\nu}=-\mathscr{A}_{\mu\nu} \quad (5.4.13)$$

因此6维反对称张量可以分解为一个自对偶反对称张量和一个反自偶反对称张量的和。可以证明，在正交变换下对$\mathscr{D}_{\mu\nu}$和$\mathscr{A}_{\mu\nu}$分别构成一个3维不变子空间。因此6维反对称张量表示可分解为一个3维自对偶反对称张量表示和一个3维反自对偶反对称张量表示的直和。

总之，由（5.4.5）和（5.4.11）两式，最后可得

$$\psi_{\mu\nu}=S^0{}_{\mu\nu}+\frac{1}{4}\chi\delta_{\mu\nu}+\mathscr{D}_{\mu\nu}+\mathscr{A}_{\mu\nu} \quad (5.4.14)$$

这就是说在四维正交变换下，任一2级张量可分解为一个无迹9维对称张量，一个1维标量，一个3维自对偶反对称张量和一个3维反自对偶反对称张量的和，或者说一个4维正交群的16维2级张量表示可约化为上述4个相应的不可约张量表示的直和。

二、三维转动群R_3和幺模幺正群$SU(2)$，固有洛仑兹群L_p和幺模群$SL(2,c)$的同态对应。

下面将证明，物理学中二个极其重要的群R_3和L_p的全部表示可分别由$SU(2)$和$SL(2,c)$二个群的表示得到。为此，在4维复空间(x_μ)中引入一个所谓复4维正交群$\overline{O}_4$。设变换 $x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu$

满足条件 $x'_\mu x'_\mu=x_\mu x_\mu$

可得正交条件：$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}=\delta_{\nu\rho}$ 或$\overline{O}_4{}^T O_4=I$。

（1）$\overline{O}_4\approx SL(2,c)\otimes SL(2,c)$

引入二个复4×4正交矩阵

$$A=\begin{pmatrix} l & p & -n & m \\ -p & l & m & n \\ n & -m & l & p \\ -m & -n & -p & l \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \lambda & \pi & -\nu & -\mu \\ -\pi & \lambda & \mu & -\nu \\ \nu & -\mu & \lambda & -\pi \\ \mu & \nu & \pi & \lambda \end{pmatrix}$$

（5．4．15）

其中 $l^2+m^2+n^2+p^2=1=\lambda^2+\pi^2+\nu^2+\mu^2$

我们注意到这正交矩阵的条件 $x_\mu'x'_\mu=x_\mu x_\mu$ 或 $\widetilde{A}\cdot A=I$ 与么正矩阵条件 $x_\mu^{*\prime}x_\mu'=x_\mu^* x_\mu$ 或 $U^+U=I$ 是不同的。

矩阵 A、B 有下列性质。

（a）可以证明 A、B 分别构成群，并且是 $\overline{O}_4$ 的子群。

（b） $A=l\cdot I+\mathscr{D}$ ， $B=\lambda I+\mathscr{A}$。(5.4.16)

式中 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{A}$ 分别是自对偶和反自对偶反对称矩阵。

例：$\mathscr{D}$ 为

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix} 0 & p & -n & m \\ -p & 0 & m & n \\ n & -m & 0 & p \\ -m & -n & -p & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{D}^D{}_{12}=\frac{1}{2}\varepsilon_{12\rho\sigma}\mathscr{D}_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{1234}\mathscr{D}_{34}+\varepsilon_{1243}\mathscr{D}_{43}\right)=P=\mathscr{D}_{12}\cdots$$

（5．4．17）

（c）$A\cdot B=B\cdot A$

我们可证：$\overline{O}_4=A\otimes B$。为此先证：$\overline{O}_4$ 的任一元素可表为 $A\cdot B$。

考虑无穷小 $\overline{O}_4$ 变换

$$a_{\rho\sigma}=\delta_{\rho\sigma}+\varepsilon_{\rho\sigma},\quad \varepsilon_{\rho\sigma}=-\varepsilon_{\sigma\rho}$$

$A\cdot B$ 中令 $l=\lambda=1$，其它均是无穷小量。则

$$(A\cdot B)_{\rho\sigma}=[(I+\mathscr{D})(I+\mathscr{A})]_{\rho\sigma}=\delta_{\rho\sigma}+\mathscr{D}_{\rho\sigma}+\mathscr{A}_{\rho\sigma}$$

其中 $\mathscr{D}$、$\mathscr{A}$ 是 A、B 中去掉对角元素 I 后的反对称矩阵。

如果要求 $a_{\rho\sigma}=(AB)_{\rho\sigma}$，则 $\delta_{\rho\sigma}+\varepsilon_{\rho\sigma}=\delta_{\rho\sigma}+\mathscr{D}_{\rho\sigma}+\mathscr{A}_{\varepsilon\sigma}$

则 $\varepsilon_{\rho\sigma}=\mathscr{D}_{\rho\sigma}+\mathscr{A}_{\varepsilon\sigma}$ (5.4.18)

(5.4.18)式是关于m、n、p和μ、ν、π等6个 参量的6元一次联立代数方程，它一定有解。解为

$$m=\frac{1}{2}(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{14}) \qquad n=\frac{1}{2}(-\varepsilon_{13}+\varepsilon_{24})$$

$$p=\frac{1}{2}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{34})$$

$$\mu=\frac{1}{2}(\varepsilon_{23}-\varepsilon_{14}) \qquad \nu=\frac{1}{2}(-\varepsilon_{13}-\varepsilon_{24})$$

$$\pi=\frac{1}{2}(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{34}) \qquad (5.4.19)$$

因此任一无穷小$\overline{O}_4$元素都可表为A、B的无穷小元素之积。而任一有限$\overline{O}_4$元素可表为

$\prod_i(A^{(i)}B^{(i)})$其中$A^{(i)}$、$B^{(i)}$均是上述无穷小矩阵，但

由(15.4.17)式，上式可化为

$$\overline{O}_4=\prod_i(A^{(i)}B^{(i)})=\prod_i(A^{(i)}\prod_i(B^{(i)})=A\cdot B \qquad (5.4.20)$$

这这就证明了$\overline{O}_4$的任一元素可表为$A\cdot B$。又由(5.4.17)知，对整个群来说可以写成

$$\overline{O}_4=A\otimes B \qquad (5.4.21)$$

(如果$a\in A, b\in B, O\in\overline{O}_4$，则当$O=(a, b)$，$O'=(a',b')$，且$O\cdot O'=(aa', bb')$就说$\overline{O}_4=A\otimes B$)。

(5. 4. 21)式是表明群元素之间的关系，不是矩阵之间的关系。(5.4.20)才是矩阵间关系。但是，如果把A、B当作矩阵，则

$\overline{O}_4\sim A\otimes B=C$，即$C=A\otimes B$是$\overline{O}_4$群的一个表示。引入非奇异常数矩阵

$$T^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0 & i & 1\\ 1 & -i & 0 & 0\\ -1 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 1\end{pmatrix}$$

使得 $A'=T^{-1}AT=V\otimes I$ (5.4.22)

$B'=T^{-1}BT=I\otimes W$ (5.4.23)

其中 $V=\begin{pmatrix}l+ip & m-in\\ -(m+in) & l-ip\end{pmatrix}$ (5.4.24)

$W=\begin{pmatrix}\lambda-i\pi & \mu+i\nu\\ -(\mu-i\nu) & \lambda+i\pi\end{pmatrix}$ (5.4.25)

和 $\det W=\det V=1$，即V、W是属于$SL(2,c)$群．

证：由直接计算得：

$$A'=\begin{pmatrix}l+ip & 0 & m-in & 0\\ 0 & l+ip & 0 & m-in\\ -(m+in) & 0 & l-ip & 0\\ 0 & -(m+in) & 0 & l-ip\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}l+ip & m-in\\ -(m+in) & l-ip\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=V\otimes I \quad (5.4.26)$$

$$B'=\begin{pmatrix}\lambda-i\pi & \mu+i\nu & 0 & 0\\ -(\mu-i\nu) & \lambda+i\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-i\pi & \mu+i\nu\\ 0 & 0 & -(\mu-i\nu) & \lambda+i\pi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\lambda-i\pi & \mu+i\nu\\ -(\mu-i\nu) & \lambda+i\pi\end{pmatrix}$$

$$=I\otimes W \quad (5.4.27)$$

$$\overline{O}'_4=T^{-1}\overline{O}_4T=T^{-1}ATT^{-1}BT=A'B'$$

$$=(V\otimes I)\ (I\otimes W)=(V\cdot I)\otimes(I\cdot W)=V\otimes W^* \quad (5.4.28)$$

这表明矩阵$\overline{O}'_4=V\otimes W$和矩阵$\overline{O}_4=A\cdot B$是等价的．

由（5.4.26）式知

$$\overline{O}_4 = SL(2c) \otimes SL(2c) \quad (5.4.29)$$

即$\overline{O}_4$群同构于二个2维复幺模群的直积。

（2）$R_4 \approx SU(2) \otimes SU(2)$。

证明：在实空间内4维复正交群$\overline{O}_{4c}$变为4维转动群R_4。这时A，B的矩阵元都是实数，二个幺模矩阵V，W均取下述形式，即

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \det X = aa^* + bb^* = 1$$

显然 $$X^+ X = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

因此X是$SU(2)$群的一元素。所以

$$R_4 \approx SU(2) \otimes SU(2) \quad (5.4.30)$$

或4维转动群同构于二个2维幺模幺正群的直积。

（3）$SU(2) \sim R_3$

证明：在下述（5.4.31）式中，令$\lambda = l$，$\mu = m$，$\nu = n$，$\pi = p$，并且全是实数，则

$R_4 = A \cdot B$

$$= \begin{pmatrix} +l\lambda + m\mu - n\nu - p\pi & l\pi + p\lambda + m\nu + n\mu \\ -(l\pi + p\lambda) + m\nu + n\mu & l\lambda + n\nu - m\mu - p\pi \\ l\nu + n\lambda + m\pi + p\mu & -(l\mu + m\lambda) + n\pi + p\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} -(l\nu + n\lambda) + m\pi + p\mu & 0 \\ l\mu + m\lambda + n\pi + p\nu & 0 \\ l\lambda + p\pi - m\mu - n\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 \oplus 1$$

并且有$W = V^*$，即$R_3 \approx V \otimes V^*$或$SU(2)$同态于三维空间转

动群。

我们注意到：R_3中一个元素可与$SU(2)$群中二个互差一负号的元素对应。即$SU(2)$与R_3同态，但是R_3并不同态于$SU(2)$群。但以后我们仍说，$SU(2)$矩阵是R_3群的双值表示。

(4) $SL(2,c)\sim L_p$

证明：利用(5.4.15)式，可得：

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} +l\lambda+m\mu-n\nu-p\pi & l\pi+p\lambda+m\nu+n\mu & -(l\nu+n\lambda)+m\pi+p\mu & m\lambda-l\mu+n\pi-p\nu \\ -(l\pi+p\lambda)+m\nu+n\mu & l\lambda+n\nu-m\mu-p\pi & l\mu+m\lambda+n\pi+p\nu & n\lambda-l\nu+p\mu-m\pi \\ l\nu+n\lambda+m\pi+p\mu & -(l\mu+m\lambda)+n\pi+p\nu & l\lambda+p\pi-m\mu-n\nu & p\lambda-l\pi+m\nu-n\mu \\ l\mu-m\lambda+n\pi-p\nu & l\nu+p\mu-m\pi-n\lambda & l\pi-p\lambda+m\nu-n\mu & l\lambda+m\mu+n\nu+p\pi \end{pmatrix} \tag{5.4.31}$$

为了满足L_p变换矩阵元的实数性条件，在(5.4.31)中令

$$\lambda=l^* \qquad \mu=m^* \qquad \nu=n^* \qquad \pi=p^*$$

代入(5.4.27)和(5.4.28)，可得

$$W=V^*$$

因为在(5.4.29)中二个$SL(2,c)$矩阵仅一个是独立的。所以有

$$L_p\sim V\otimes V^* \tag{5.4.32}$$

或$SL(2,c)$同态于固有洛仑兹群L_p。

应注意到：(a)把(5.4.29)式写成(5.4.32)式时，L_p中一个元素同时与$SL(2,c)$中二个互差一个负号的元素相对应。所以$SL(2,c)$群同态于L_p。但是L_p并不同态于$SL(2,c)$群。但以后我们仍说，$SL(2,c)$矩阵是固有洛仑兹群L_p的双值表

示。

$(b)R_4$群和L_p群的差别，R_4群是紧致李群，它有么正表示。但L_p群是非紧致李群，只有么模表示。

最后，我们终于把R_3群和L_p群的表示问题化为求二个较简单的$SU(2)$和$SL(2c)$的表示问题。

§5 $SU(2)$群的表示

设有一复2维空间，基矢是 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ (5.5.1)

变换矩阵：

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.5.2}$$

满足么模条件 $\det M=ad-bc=1$

和么正条件 $M^+=M^{-1}$或 $\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

故得 $d=a^*$, $c=-b^*$ (5.5.3)

利用(5.5.3)式，可得

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{5.5.4}$$

由(5.5.4)和(5.5.2)式知，$SU(2)$群仅含$n^2-1=3$个参量。

下面我们要找出$SU(2)$群的在$(2j+1)$维空间内的不可约表示。为此，我们由u_1、u_2构成$(2j+1)$维线性空间的基矢：

$$p_0^{(j)}=u_1^{(2j)},\ p_1^{(j)}=u_1^{(2j-1)}u_2\cdots p_k^{(j)}=u_1^{(2j-k)}u_2^{(k)}\cdots$$
$$p_{2j}^{(j)}=u_2^{(2j)} \tag{5.5.5}$$

其中$2j$值取为0或任意正整数。

可以证明，$p^j=(p_0^{(j)},p_1^{(j)},p_2^{(j)},\cdots,p_{2j}^{(j)})$是$SU(2)$群的$(2j+1)$维表示对象。

$$p_k^{(j)}=D_{kl}^{(j)}p_l^{(j)}$$

其中$D^{(j)}$就是$SU(2)$群在这个线性空间内的$(2j+1)$维表示。

证明：$p_k^{(j)}=u_1^{(2j-k)}u_2^{(k)}=(au_1+bu_2)^{2j-k}(-b^*u_1+a^*u_2)^k$

$$=\left[\sum_{m=0}^{2j-k}\frac{(2j-k)(2j-k-1)\cdots(2j-k-m+1)}{m!}(au_1)^{2j-k-m}\right.$$

$$\times(bu_2)^m\times\sum_{n=0}^{k}\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}(-b^*u_1)^{k-n}\times$$

$$\left.\times(a^*u_2)^n\right]=\sum_{(m+n)=0}^{2j}D_{k,m+n}^{(j)}u_1^{(2j-k-m+k-n)}u_2^{(m+n)}=$$

$$=\sum_{l=0}^{2j}D_{kl}^{(j)}u_1^{(2j-l)}u_2^{(l)}=D_{kl}^{(j)}u_1^{(2j-l)}u_2^{(l)}=D_{kl}^{(j)}p_l^{(j)}$$

(5.5.6)

其中，l取值范围是$0-2j$。

不难证明，(5.5.6)变换构成群。因此(5.5.6)是$SU(2)$群的一个表示。这是一个$(2j+1)$维的表示。由于$SU(2)$群同态于三维转动群R_3，因此它也是R_3群的$(2j+1)$维表示。

我们把基矢$P^{(j)}=(P_0^{(j)}P_1^{(j)}\cdots P_{2j}^{(j)})$叫作3维实空间的$2j$级旋量。特别当$j=\frac{1}{2}$时，基矢$P^{(1/2)}=\begin{pmatrix}P_0^{(1/2)}\\P_1^{(1/2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

$=u$

叫做3维实空间的一级基本旋量。

由于$SU(2)$是紧致李群，因此它应有幺正表示。为了得到这个幺正表示，引入新基矢：

$$\eta^j_m=\frac{u_1^{j+m}u_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\ (j-m)!}}=\frac{u_1^{2j-k}u_2^k}{\sqrt{(2j-k)!k!}}$$

$$=\frac{p_k}{\sqrt{(2j-k)!k!}} \qquad (5.5.7)$$

其中 $m=j-k$，当 k 值取 $0\to j$ 时，

$m=-j,\ -j+1,\ \cdots\ ,-1,\ j$

可以证明，把(5.5.7)式作为$(2j+1)$维线性空间中基矢时，作$SU(2)$变换，可以得到：

$\eta_m^{j\prime}\bar{\eta}_m^{j\prime}=\eta_m^j\bar{\eta}_m^j \qquad (m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j)$

证明：两边乘以$(2j)!$ 后，得

左边：

$$(2j)!\eta_m^{j\prime}\bar{\eta}_m^{j\prime}=(2j)!\sum_{k=0}^{2j}\frac{u_1^{\prime 2j-k}\bar{u}_1^{\prime 2j-k}u_2^{\prime k}\bar{u}_2^{\prime k}}{(2j-k)!\ k!}$$

$$=(u_1^\prime\bar{u}_1^\prime+u_2^\prime\bar{u}_2^\prime)^{2j}$$

右边：$(2j)!\bar{\eta}_m^j\eta_m^j=(u_1\bar{u}_1+u_2\bar{u}_2)^{2j}$　　即证。

可以证明，上述$(2j+1)$维么正表示矩阵元是：

$$D^j_{m,m^\prime}=$$

$$(-1)^{m^\prime-m}\sum_l(-1)^l\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m^\prime)!(j-m^\prime)!}}{l!(j+m-l)!(j-m^\prime-l)!(l+m^\prime-m)!}$$

$$\times a^{j+m-l}a^{*j-m^\prime-l}b^{*l+m^\prime-m}b^l \qquad (5.5.8)$$

m，$m^\prime$取值范围是$-j,-j+1,\cdots,j-1,j$。l取值范围是，$\geqslant 0$，$\geqslant m-m^\prime$中最大者为下限值，$\leqslant j-m^\prime$和$\leqslant j+m$中最小者为上限值。

例1：当$j=\frac{1}{2}$，则$SU(2)$群的表示是$D^{1/2}$，$m^\prime$、m可取$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$值。利用(5.5.8)式，可以得到：

$$D^{1/2}_{1/2\,1/2}=(-1)^0(-1)^0\frac{\sqrt{1!0!1!0!}}{0!1!0!0!}a^1a^{*0}b^{*0}b^0=a$$

类似可得 $D^{1/2}_{1/2\,-1/2}=b$, $D^{1/2}_{-1/2\,1/2}=-b^*$, $D^{1/2}_{-1/2\,-1/2}=a^*$

因此$D^{1/2}$为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

它是(5.5.4)的一级旋量表示。

例2：当$j=1$，则表示应为D^1，m'、m可取-1，0，1值，由(5.5.8)式可得：

$$D^1_{10}=(-1)^{-1}(-1)^1\frac{\sqrt{2!\ 0!\ 1!\ 1!}}{1!\ 1!\ 0!\ 0!}a^1a^{*0}b^{*0}b^1=\sqrt{2}ab$$

类似可得到其它的矩阵元，最后得：

$$D^1=\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & aa^*-bb^* & \sqrt{2}a^*b \\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2} \end{pmatrix}$$

我们可以证明：(a) $SU(2)$群所有的表示D^j 都是不可约的，而且$SU(2)$群所有的不可约表示均为D^j所穷尽。特别是所有的D^j的复共轭表示D^{j*}和D^j等价。

例：$D^{1/2}$和$D^{1/2*}$等价。这是因为 $M^*=\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}$

和 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ 的特征标相等。

(b)克莱布施-戈登定理：若$SU(2)$群二个么正表示分别是D^{j_1}和D^{j_2}，$\eta^{j_1}_{m1}=D^{j_1}_{m1m'_1}\eta^{j_1}_{m'_1}$

$$\eta'^{j_2}_{m_2} = D^{j_2}_{m_2 m'_2}\eta^{j_2}_{m'_2}$$

则 $D^{j_1}\otimes D^{j_2}=D^{|j_1+j_2|}\oplus D^{|j_1+j_2-1|}\oplus\cdots\oplus D^{|j_1-j_2|}$ (5.5.9)

等式右边任一不可约表示的么正表示的对象 $\eta_m{}^j$ 可表为等式左边两个不可约表示对象的直积，表示对象 $\eta^{j_1}_{m_1}\cdot\eta^{j_2}_{m_2}$ 的线性组合。即

$$\eta_m{}^j=\sum_{\substack{m_1 m_2\\ m_1+m_2=m}}\langle j_1 j_2 m_1 m_2|jm\rangle\eta^{j_1}_{m_1}\eta^{j_2}_{m_2} \qquad (5.5.10)$$

其中系数叫作克莱布施-戈登系数。它的表式是：

$$<j_1 j_2 m_1 m_2|jm>=\sum_\lambda(-)^\lambda\times\frac{1}{\sqrt{(j+j_1+j_2+1)!}}\times$$

$$\frac{[(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!(j+m)!}{\lambda!(j_1+j_2-j-\lambda)!(j_1-m_1-\lambda)!(j-j_2+m_1+\lambda)!}\rightarrow$$

$$\frac{(j-m)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!]^{1/2}}{(j_2+m_2-\lambda)!(j-j_1-m_2+\lambda)!} \qquad (5.5.11)$$

λ所允许的取值范围是使(5.5.11)式中分母中阶乘不出现负整数阶乘的所有λ值。

例：$j_2=1/2$，则$<j_1\frac{1}{2}m_1m_2|jm>$之值如下表所示。

	$m_2=1/2$	$m_2=-1/2$
$J=J_1+\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{J_1+m_1+1}{2J_1+1}}$	$\sqrt{\frac{J_1-m_1+1}{2J_1+1}}$
$J=J_1-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{J_1-m_1}{2J_1+1}}$	$\sqrt{\frac{J_1-m_1}{2J_1+1}}$

§6 $SL(2,c)$群的表示

设有一2维复空间$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$内的变换：

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (5.6.1)$$

变换矩阵 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，满足么模条件

$$\det M=ab-bc=1$$

则由变换M所构成的群叫$SL(2,c)$群。它含有$2n^2-2=6$个参量。

由于变换M和其复共轭变换M^*

$$\begin{pmatrix} u_1^{*\prime} \\ u_2^{*\prime} \end{pmatrix}=M^*\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_1^* \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \qquad (5.6.2)$$

是不等价的，因此有必要扩充表示空间的维数以把复共轭表示包含在内。

因此，由四个分量u_1u_2、$u_1^*u_2^*$，构成的$(2j+1)(2j'+1)$维线性矢量空间的基矢：

$$p_{00}^{(jj')}=u_1^{2j}u_1^{*2j'},\quad p_{01}^{(jj')}=u_1^{2j}u_1^{*2j'-1}u_2^*,\quad p_{10}^{(jj')}=u_1^{2j-1}u_1^{*2j'}u_2,$$

$$p_{11}^{(jj')}=u_1^{2j-1}u_1^{*2j'-1}u_2u_2^*,\ \cdots,\ p_{kk'}^{(jj')}=u_1^{2j-k}u_1^{*2j'-k'}u_2^{k}u_2^{*k'}\cdots p_{2j,2j'}^{(jj')}=u_2^{2j}u_2^{*2j'}$$

其中$2j$、$2j'$是0或任意正整数，k、k'取值范围是

$$0\leqslant k\leqslant 2j \qquad 0\leqslant k'\leqslant 2j'$$

现在证明：$P^{jj'}=(p_{00}^{(jj')},\ p_{01}^{(jj')},\ p_{10}^{(jj')}\cdots p_{2j\,2j'}^{(jj')}$是

$SL(2c)$群的$(2j+1)(2j'+1)$维表示对象，在变换(5.6.1)和(5.6.2)下

$$p_{kk'}^{(jj')}=D_{kk',ll'}^{(jj')}p_{ll'}^{(jj')}=D_{kl}^{j}D_{k'l'}^{j'}p_{ll'}^{(jj')}$$

其中$D^{jj'}$是$SL(2c)$群的$(2j+1)(2j'+1)$维表示。

证明：因为 $p_{kk'}^{(jj')}=(u_1^{2j-k}u_2^{k})(u_1^{*2j'-k'}u_2^{*k'})$

$$=p_k^{(j)}\cdot p_{k'}^{(j')}$$

即知$P_{kk'}^{(jj')}$是闵可夫斯基空间内的$(2j+2j')$级旋量。

例：$D^{1/2,0}$：$p^{(1/2,0)}=p_{00}^{(1/2,0)}, p_{10}^{(1/2,0)}=(u_1,u_2)$是1级旋量。

$D^{0\,1/2}$：$p^{0\,1/2}=p_{00}^{(0\,1/2)}, p_{01}^{(0\,1/2)}=(u_1^*,u_2^*)$
是1级复共轭旋量。

$D^{1/2\,1/2}$：$p^{1/2\,1/2}=(p_{00}^{(1/2,1/2)}, p_{01}^{(1/2,1/2)}, p_{01}^{(1/2,1/2)}, p_{11}^{(1/2,1/2)})$是2级混合旋量。

它的表示是：

$$D^{1/2\,1/2}(M\cdot M^*)=\begin{pmatrix} ac^* & ab^* & ba^* & bb^* \\ ac^* & ad^* & bc^* & bd^* \\ cc^* & cb^* & da^* & db^* \\ cc^* & cd^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} a^*b^* \\ c^*d^* \end{pmatrix}=M\otimes M^*$$

可以证明：(a) $SL(2c)$群所有的上述$D^{jj'}$表示都是不可约的，并且$SL(2c)$群的所有不可约表示均为$D^{jj'}$所穷尽，$D^{jj'}$没有等价的么正表示。

(b) $D^{jj'}(M\cdot M^*)=D^j(M)\otimes D^{j'}(M^*)$ (5.6.4)

因 $D_{kk'll'}^{jj'}=D_{kl}^{j}D_{k'l'}^{j'}$。所以$D^{jj'}$的表示对象是，

$$\eta^{jj'}_{mm'}=\frac{u_1^{j+m}u_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\cdot\frac{u_1^{*j'+m'}u_2^{*j'-m'}}{\sqrt{(j'+m')!(j'-m')!}}$$

m、m'取值范围分别为$-j,(-j+1)\cdots j-1,j$；和$-j',-j'+1\cdots j'-1,j'$。我们注意到，由于$D^{jj'}$是不可约的，因此$D^j\otimes D^{j'}$不能按克莱布施-戈登定理展开。

(c)广义克莱布施-戈登定理

如果$SL(2,c)$的二个表示分别为$D^{j_1j_1'}$ 和$D^{j_2j_2'}$，有

$$\eta^{j_1j_1'}_{m_1m_1'}=D^{j_1}_{m_1m_1'}\,{}^{j_1'}_{\overline{m}_1\overline{m}_1'}\ \eta^{j_1j_1'}_{m_1m_1'}$$

$$\eta^{j_2j_2'}_{m_2m_2'}=D^{j_2j_2'}_{m_2m_2'\overline{m}_2\overline{m}_2'}\eta^{j_2j_2'}_{\overline{m}_2\overline{m}_2'}$$

则 $$D^{j_1j_1'}\otimes D^{j_2j_2'}=D^{j_1+j_2,j_1'j_2'}\oplus D^{j_1+j_2-1,j_1'+j_2'}$$

$$\oplus D^{j_1+j_2,j_1'+j_2'-1}\oplus D^{j_1+j_2-1,j_1'j_2'-1}$$
$$\oplus\cdots\oplus D^{|j_1-j_2|,|j_1'-j_2'|}\qquad(5.6.5)$$

等式右边任一不可约表示的对象$\eta^{jj'}_{mm'}$可表为等式左边的直积表示对象$\eta^{j_1j_1'}_{m_1m_1'}\cdot\eta^{j_2j_2'}_{m_2m_2'}$的线性组合，有

$$\eta^{jj'}_{mm'}=\sum_{\substack{m=m_1+m_2\\m'=m'_1+m'_2}}\langle j_1j_2m_1m_2|jm\rangle\langle j_1'j_2'm_1'm_2'|j'm'\rangle\times$$

$$\eta^{j_1j_1'}_{m_1m_1'},\ \eta^{j_2j_2'}_{m_2m_2'}\qquad(5.6.6)$$

§7 R_3群的表示

由于$SU(2)$群同态于R_3群。我们可以证明：

(a)$SU(2)$群的全部不可约表示D^j，当j是正整数或$2j=$偶数时，即R_3群的一个张量表示。当j是半正整数或

$2j$＝奇数时，它是一种不能化为张量表示的新表示叫作R_3群的固有旋量表示简称旋量表示。

(b) R_3群的张量表示是单值的，旋量表示是双值的。如前述，R_3群中任一转动对应于$SU(2)$群中的二个矩阵M，$-M$。

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

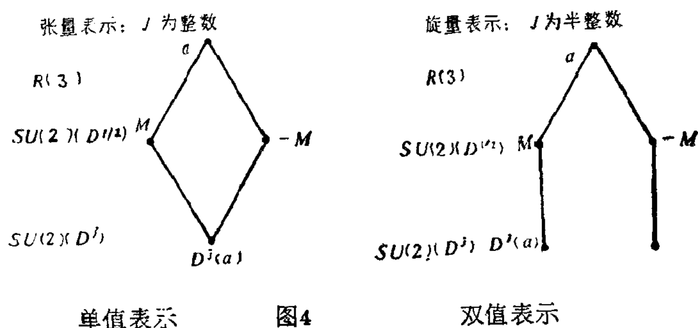
$$\begin{pmatrix} \bar{u}'_1 \\ \bar{u}'_2 \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

这就是R_3群的最低维(2维)表示，它是一个双值表示。对于一般的$(2j+1)$维表示，分别为

$$P'_k = D^j_{kl} P_l = D_k{}^j{}_l u_1{}^{2j-l} u_2{}^l \tag{5.7.1}$$

$$P'_k = D^j_{kl} P_l = D_k{}^j{}_l (-u_1)^{2j-l} (-u_2)^l = (-1)^{2j} D_k{}^j{}_l P_l$$

可见，当$2j$＝偶数时，即j＝整数，相应的表示是张量表示，并且是单值的。当$2j$＝奇数时，即j＝半整数，相应的表示是旋量表示，并且是双值的。R_3群的二类表示可用图4表示如下：



单值表示　　　图4　　　双值表示

例：在转动群R_3中，可用尤拉角(α, β, γ)来表征任一元素，相应于$SU(2)$群有2个2维的么模么正矩阵M，$-M$。

$$\pm M = \pm \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\cos\frac{1}{2}\beta e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\sin\frac{1}{2}\beta e^{\frac{1}{2}i\gamma} \\ -e^{\frac{1}{2}i\alpha}\sin\frac{1}{2}\beta e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & e^{\frac{1}{2}i\alpha}\cos\frac{1}{2}\beta e^{\frac{1}{2}i\gamma} \end{pmatrix} \tag{5.7.2}$$

特别对绕Y轴转动β，M为

$$\pm M = \pm \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\beta & \sin\frac{1}{2}\beta \\ -\sin\frac{1}{2}\beta & \cos\frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

相应的表示对象的变换是

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\beta & \sin\frac{1}{2}\beta \\ -\sin\frac{1}{2}\beta & \cos\frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{5.7.3}$$

(5.7.2)和(5.7.3)正是转动群R_3的基本表示$D^{1/2}$。它是一个双值的旋量表示。一个在xz平面内的矢量$V=(V_1, V_2)$，当坐标轴绕Y轴转动β角度时，此2维矢量的变换矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{5.7.4}$$

比较(5.7.3)和(5.7.4)两式就可知一级旋量和2维矢量在R_3群变换下的类似和差别。

§8 固有洛仑兹群的表示

由于$SL(2c)$群同态于固有洛伦兹群L_P，我们可以证

明：(a) $_{S}L(2c)$群的全部不可约表示$D^{jj'}$，当$(j+j')$是正整数或$2(j+j')$是偶数时，它是固有洛伦兹群L_p的张量表示。当$(j+j')$是半正整数或$2(j+j')$是奇数时，则它是一种不能化为张量表示的新表示叫作固有洛伦兹群的固有旋量表示，简称旋量表示。

(b)固有洛伦兹群L_P的张量表示是单值的。旋量表示是双值的。

为了得到(a)中结论。先证$D^{1/2\,1/2}$是固有洛仑兹群L_P的矢量表示，我们知道2级混合旋量$u^{*}{}_{ab}$和闵可夫斯基矢量是等价的。设有变换T，有

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{2}}Tu$$

其中

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & i & -i & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ i & 0 & 0 & i\end{pmatrix},\ T^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -i\\ 1 & -i & 0 & 0\\ -1 & +i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -i\end{pmatrix}\tag{5.8.1}$$

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}$$ 是闵可夫斯基空间中的矢量。

$$u=\begin{pmatrix}u_{11}{}^{*}\\ u_{12}{}^{*}\\ u_{21}{}^{*}\\ u_{22}{}^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{00}\\ p_{01}\\ p_{10}\\ p_{11}\end{pmatrix}$$ 是2级混合旋量

利用(5.8.1)式，可得：

$$\begin{aligned}
&\Psi_1=\tfrac{1}{2}(u_{21}{}^*+u_{12}{}^*) \qquad u_{11}{}^*=\Psi_3-i\Psi_4\\
&\Psi_2=\frac{1}{2i}(u_{21}{}^*-u_{12}{}^*) \qquad u_{12}{}^*=\Psi_1-i\Psi_2\\
&\psi_3=\tfrac{1}{2}(u_{11}{}^*-u_{22}{}^*) \qquad u_{21}{}^*=\Psi_1+i\Psi_2\\
&\Psi_4=\tfrac{1}{2}(u_{11}{}^*+u_{22}{}^*) \qquad u_{22}{}^*=-\Psi_3-i\Psi_4
\end{aligned} \tag{5.8.2}$$

因此 $\Psi'=TD^{1/21/2}T^{-1}\Psi$ (5.8.3)

可以证明，$TD^{1/2\,1/2}T^{-1}$是洛伦兹变换矩阵。由于$D^{1/2\,1/2}$和$TD^{1/21/2}T^{-1}$等价。所以$D^{1/21/2}$是矢量表示，相应的表示对象就是闵夫斯基空间内矢量。

再由数学归纳法和用克莱布施－戈登定理可以证明，当$(j+j')$等于整数，则只能是j、j'同是整数或j、j'同是半整数，并均可由$D^{1/21/2}$的多次直积表示得到，而按克莱布施-戈登定理展开后都是张量表示。

对于（b）中的论证，如前述，固有洛伦兹群L_P的任一变换对应于$SL(2,\ c)$中二个么模矩阵M，$-M$。

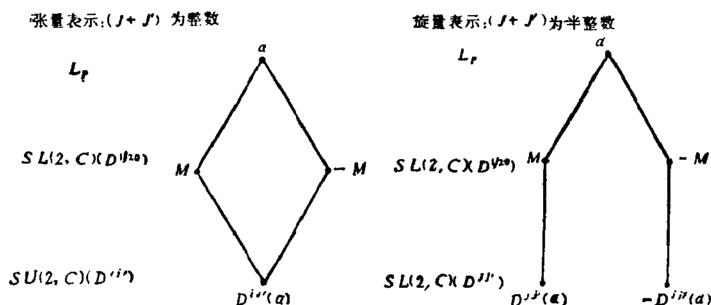
$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \bar{u}'_1 \\ \bar{u}'_2 \end{pmatrix}=-M\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

其$(2j+1)(2j'+1)$维表示对象分别是：

$$\begin{aligned}
P_{kk'}{}^{(jj')}&=D_k{}^j{}_l D_{k'}{}^{j'}{}_{l'}\ p^{(jj')}_{ll'}\\
&=D_k{}^j{}_l D_{k'}{}^{j'}{}_{l'}\ u_1^{2j-l}u_2^{l}u^{*\,2j'-l'}_1 u^{*\,l'}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P}'_{kk'}{}^{(jj')}&=D_k{}^j{}_l D_{k'}{}^{j'}{}_{l'}\overline{P}^{(jj')}_{ll'}=D_k{}^j{}_l D_{k'}{}^{j'}{}_{l'}(-u_1)^{2j-l}(-u_2)^l\times\\
&(-u_1{}^*)^{2j'-l'}(-u_2{}^*)^{l'}=(-1)^{2j-2j'}D_k{}^j{}_l D_{k'}{}^{j'}{}_{l'}p^{(jj')}_{ll'}
\end{aligned} \tag{5.8.4}$$

可见，当$2j+2j'$＝偶数，也就是$j+j'$是正整数时，表示是张量表示，而且是单值的。当$2j+2j'$＝奇数，也就是$j+j'$是半正整数时，表示是旋量表示，而且是双值的。固有洛伦兹群L_P的二类表示如图5。



单值表示　　　图5　　　双值表示

两点注记：（1）$D^{jj'}$表示的退化情况。在固有洛仑兹变换中仅是纯空间转动变换情况下，M和 M^* 是等价的。并且是$SU(2)$矩阵，因此$D^{jj'}=D^j\oplus D^{j'}$中D^j和$D^{j'}$是属于L_P群的子群 R_3 的二个表示。按克莱布施-戈登定理可展开为 R_3 群的不可约表示的直和。相应地此时表示对象$\eta^{jj'}$是R_3群表示对象η^j和$\eta^{j'}$之积$\eta^j\cdot\eta^{j'}$。这就叫作$\eta^{jj'}$表示的退化情况。

（2）在洛仑兹协变(L_P)的基本粒子理论中，我们认为基本粒子的波函数是L_P群的各种不可约表示中的表示对象。而任一复合粒子则应是L_P群的可约表示，或L_P群的不可约表示的直积表示。按克莱布施-戈登定理，可约表示总可以分解为一些不可约表示的直和。这就反映了复合粒子可看作由基本粒子所组成的这一事实。

§9　旋量分析

场方程在洛仑兹变换下形式不变，要求场方程的每一项

在洛仑兹变换下应具有完全相同的变换性质。例如，场方程中每一项都是洛仑兹标量，洛仑兹矢量…等，这等于要求整个场方程有某一确定的洛仑兹变换性质。通常我们把这叫作场方程具有洛仑兹协变性。由于固有洛仑兹群L_P的全部不可约表示$D^{jj'}$不是张量表示就是旋量表示，因此任一个洛仑兹协变物理方程只能表为洛仑兹协变张量方程或洛仑兹协变旋量方程的二种形式。在这二类表示中，场函数不是张量就是旋量。关于张量分析是大家熟知的。这一节我们介绍旋量分析以及它与张量分析的关系。

一、1级旋量叫作基本旋量。最低级旋量就是旋量表示$D^{1/2\ 0}=D^{1/2}$和$D^{0\ 1/2}=D^{*1/2}$的表示对象。

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad 和 \qquad u^*=\begin{pmatrix} \overset{*}{u}_1 \\ \overset{*}{u}_2 \end{pmatrix}$$

任二个旋量u、v或u^*、v^*可构成不变量

$$u_1'v_2'-u_2'v_1'=u_1v_2-u_2v_1$$
$$u_1'^*v_2'^*-u_2^{*\prime}v_1^{*\prime}=u_1^*v_2^*-u_2^*v_1^* \tag{5.9.1}$$

这两式的证明，只要以

$$u_1'=au_1+bu_2 \qquad u_2'=cu_1+du_2$$
$$v_1'=av_1+bv_2 \qquad v_2'=cv_1+dv_2$$

代入(5.9.1)式，再利用么模条件，就可得证。

引入常数度规矩阵

$$(g^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-\tilde{g} \qquad g^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9.2}$$

及变换
$$\begin{cases} u^{\alpha}=g^{\alpha\beta}u_{\beta} \quad (\alpha,\beta=1,\ 2) \\ u^{*\alpha}=g^{\alpha\beta}u_{\beta}^{*} \end{cases} \tag{5.9.3a}$$

其中u^{α}及$u^{*\alpha}(\alpha=1,\ 2)$分别叫作逆变旋量和共轭逆变旋量。

$$\begin{cases} u_{\alpha}=g_{\alpha\beta}u^{\beta} \\ u^{*}_{\alpha}=g_{\alpha\beta}u^{*\beta} \end{cases} \qquad (g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9.3b}$$

或
$$\begin{pmatrix} u^{1} \\ u^{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1} \\ u_{2} \end{pmatrix} \quad 即 \quad u^{1}=u_{2} \quad u^{2}=-u_{1} \tag{5.9.4}$$

$$\begin{pmatrix} u^{1*} \\ u^{2*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1}^{*} \\ u_{2}^{*} \end{pmatrix} \quad 即 u^{*1}=u_{2}^{*},u^{2*}=-u_{1}^{*}$$

(5.9.1)式可写为

$$u_{1}v^{1}+u_{2}v^{2}=u_{\alpha}v^{\alpha}=g^{\alpha\beta}u_{\alpha}v_{\beta}=g^{\alpha\beta}u'_{\alpha}v_{\beta}' \tag{5.9.5}$$

$$u_{1}^{*}v^{1*}+u_{2}^{*}v^{*2}=u_{\alpha}^{*}v^{*\alpha}=g^{\alpha\beta}u_{\alpha}^{*}v_{\beta}^{*}=g^{\alpha\beta}u_{\alpha}^{*\prime}v_{\beta}^{*\prime}$$

(5.9.5)式表明任二个1级旋量的标积在洛仑兹变换(L_{P})下是一个不变量。但应该注意到$g^{\alpha\beta}u_{\alpha}v^{*}_{\beta}$，$g^{\alpha\beta}u_{\alpha}^{*}v_{\beta}$并不是洛仑兹变换下的不变量，固此不能称作标积。

下面我们指出(5.9.5)式有下述性质，由度规矩阵$(g^{\alpha\beta})$的反对称性可得：

$$(a)\ g^{\alpha\beta}u_{\alpha}v_{\beta}=-g^{\beta\alpha}u_{\alpha}v_{\beta}或u_{\alpha}v^{\alpha}=-u^{\alpha}v_{\alpha} \tag{5.9.6}$$

$$g^{\alpha\beta}u_{\alpha}^{*}v^{*}_{\beta}=-g^{\beta\alpha}u_{\alpha}^{*}v_{\beta}^{*}或u_{\alpha}^{*}v^{*\alpha}=-u^{*\alpha}v_{\alpha}^{*}$$

$$(b)\ g^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta}=g^{\alpha\beta}u^{*}_{\alpha}u_{\beta}^{*}=0或u_{\alpha}u^{\alpha}=u_{\alpha}^{*}u^{*\alpha}=0 \tag{5.9.7}$$

这表明，一级旋量的长度恒为0。

(c) $g^{\beta\alpha}(u_\alpha v_\beta w_\gamma + u_\beta v_\gamma w_\alpha + u_\gamma v_\alpha w_\beta) = 0$ （留作习题）

(5.9.8)

二、高级旋量

由克莱布施-戈登定理知，可用一级旋量的积构成任意高级旋量。

例：$w_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta$ 是一个2级旋量，$w_{\alpha\beta^*} = u_\alpha v_{\beta^*}$ 是一个2级混合旋量。$u_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\beta\cdot}{}_{*} = u_\alpha v^\beta w^*_\gamma$ 是一个3级混合旋量。

因此，任意高级旋量在$SL(2, c)$群变换下的变换性质可仿上例定义。

高级旋量有下述一般性质：

(a)同一类协变和逆变指标（都不带星号或都带星号的指标）缩并，使旋量降2级。

例：$u_{\dot{\alpha}*\dot{\beta}}{}^{\gamma*\beta}{}_{\dot{\delta}} = u_{\dot{\alpha}*}{}^{\gamma*}{}_{\dot{\delta}}$

$u_{\dot{\alpha}*\dot{\beta}}{}^{\alpha*\gamma}{}_{\dot{\delta}} = u_{\dot{\beta}}{}^{\gamma}{}_{\dot{\delta}}$

(b)任意奇数级旋量的长度是0.

例：$u_{\alpha*\beta\gamma}u^{\alpha*\beta\gamma} = -u^{\alpha*}{}_{\beta\gamma}u_{\alpha*}{}^{\beta\gamma} = u^{\alpha*\beta}{}_{\gamma}u_{\alpha*\beta}{}^{\gamma} =$

$$= -u^{\alpha*\beta\gamma}u_{\alpha*\beta\gamma} = 0$$

(c) $(u_{\dot{\alpha}\dot{\beta}*}{}^{\gamma*}{}_{\dot{\delta}})^* = u_{\dot{\alpha}*\dot{\beta}}{}^{\gamma}{}_{\dot{\delta}*}$

(d)旋量对于交换无星指标和有星指标是对称的。同一类指标无一定的对称性。但是，如果高级旋量系由一级旋量的乘积组成，则此高级旋量对全部指标都对称。

例：$u_{\alpha\beta*}{}^{\gamma} = u_{\beta*\alpha}{}^{\gamma} = u_{\dot{\alpha}}{}^{\gamma}{}_{\dot{\beta}*}$

(e)当$(2j+2j')$级旋量的$(j+j')$为整数时，此旋量是洛仑兹张量，否则叫固有旋量。

三、旋量微分

(a)最基本的微分运算是梯度运算。在闵可夫斯基空间中，梯度运算是一个矢量算符。由2级混合旋量$u_{\alpha\beta^*}$与矢量ψ_α之间的关系

$$u=\sqrt{2}\,T^{-1}\psi \tag{5.9.9}$$

其中T^{-1}是(5.8.1)式。

可由矢量微分算符定义旋量微分算符：

$$\partial_{11^*}=\partial_2-i\partial_4=\partial_{1^*1},\quad \partial_{12^*}=\partial_1-i\partial_2=\partial_{2^*1}$$

$$\partial_{21^*}=\partial_1+i\partial_2=\partial_{1^*2}\qquad \partial_{22^*}=-\partial_3-i\partial_4=\partial_{2^*2} \tag{5.9.10}$$

或
$$\partial_1=\frac{1}{2}(\partial_{21^*}+\partial_{12^*})\qquad \partial_2=\frac{1}{2i}(\partial_{21^*}-\partial_{12^*})$$

$$\partial_3=\tfrac{1}{2}(\partial_{11^*}-\partial_{22^*})\qquad \partial_4=-\tfrac{1}{2}i(\partial_{11^*}+\partial_{22^*}) \tag{5.9.11}$$

可见，在洛仑兹变换下，旋量微分算符的变换性质和二级混合旋量$u_{\alpha\beta^*}$相同。(5.9.10)和(5.9.11)式是矢量微分和旋量微分之间的变换关系。

(b)矢量的散度的旋量式

$$\partial_\mu\psi_\mu=-\tfrac{1}{2}\partial_{\alpha\beta^*}u^{\alpha\beta^*} \tag{5.9.12}$$

证明：由(5.8.2)和(5.9.11)两式代入上述左边，并考虑(5.9.4)式，

$u_{11^*}=u^{22^*}$，$u_{22^*}=u^{11^*}$，$u_{12^*}=-u^{21^*}$

$u_{21^*}=-u^{12^*}$；

即可证。

(c)达朗贝尔算符的旋量表达式

$$\Box\psi=\partial_\mu\partial_\mu\psi=-\frac{1}{2}\partial_{\alpha\beta^*}\partial^{\alpha\beta^*}\psi \qquad (5.9.13)$$

证明：由（5.9.11）和（5.9.4）两式代入上式左边并定义

$$\partial^{\alpha\beta^*}=g^{\alpha\gamma}g^{\beta^*\delta^*}\partial_{\gamma\delta^*}$$

即可证。

例：麦克斯韦方程：

$\begin{cases}\Box A_\mu=0\\ \partial_\mu A_\mu=0\end{cases}$ 的旋量形式是 $\begin{cases}\partial_{\alpha\beta^*}\partial^{\alpha\beta^*}A_{\alpha\beta^*}=0\\ \partial_{\alpha\beta^*}A^{\alpha\beta^*}=0\end{cases}$

其中 $A_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}T(A_{\alpha\beta^*})$

狄拉克方程：

$$(r_\mu\partial_\mu+k)\psi=0$$

其中，$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi^*\end{pmatrix}$ $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ $\chi^*=\begin{pmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\end{pmatrix}$

的旋量形式是 $\partial_{\alpha\beta^*}\varphi^\alpha=ik\chi_{\beta^*}$

$$\partial^{\alpha\beta^*}\chi_{\beta^*}=ik\varphi^\alpha$$

由上可知，旋量微分运算和张量微分运算可以互换，但由于L_P群的张量表示和旋量表示一般并不等价，因此洛仑兹协变场方程的二类不同形式并不等价。按克莱布施-戈登定理，张量可表为旋量的直积而旋量不能表为张量的直积。从此意义上说，最基本最普遍的洛仑兹协变场方程是旋量形式。

§10 自旋和转动群

考虑闵可夫斯基时空内某个物理场量$\psi_a(x_\mu)$。由洛仑

兹协变（L_P）场论知，$\psi_\alpha(x_\mu)$应是固有洛仑兹群（L_P）的某一表示$D^{jj'}$的表示对象。在无穷小洛仑兹变换下：

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) x_\nu \quad (\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}) \tag{5.10.1}$$

$\psi_\alpha(x_\mu)$应发生相应的变换：

$$\psi_\alpha'(x'_\mu) = D^{jj'}_{\alpha\beta} \psi_\beta(x_\mu)$$

其中表示矩阵　　$D^{jj'}_{\alpha\beta}(a_{\mu\nu}) = D^{jj'}_{\alpha\beta}(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})$，可按泰勒级数展开

$$D^{jj'}_{\alpha\beta}(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) = D^{jj'}_{\alpha\beta}(\delta_{\mu\nu}) + \left.\frac{\partial D^{jj'}_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right|_{\varepsilon_{\mu\nu}=0} \varepsilon_{\mu\nu} + O(\varepsilon_{\mu\nu}^2)$$

$$\approx \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu,\alpha\beta} \tag{5.10.2}$$

式中

$$I_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv 2 \left.\frac{\partial D^{jj'}_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right|_{\varepsilon_{\mu\nu}=0} = -I_{\nu\mu,\alpha\beta}$$

是一常数矩阵。

因此　　$\psi_\alpha'(x_\mu') = (\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu,\alpha\beta}) \psi_\beta(x_\mu)$　(5.10.3)

或　　$\delta\psi_\alpha(x_\mu) = \psi_\alpha'(x'_\mu) - \psi_\alpha(x_\mu) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu,\alpha\beta} \psi_\beta(x_\mu)$

$I_{\mu\nu}$即$D^{jj'}$的无穷小表示矩阵，常数矩阵元完全决定于表示的性质，或场量$\psi_\alpha(x_\mu)$在洛仑兹变换下的变换性质。例如对于表示D^{00}，表示对象应是标量场，$I_{\mu\nu}=0$　　(5.10.4)

对于表示$D^{0\,1/2}$，$D^{1/2\,0}$表示对象应是1级旋量场：

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \tag{5.10.5}$$

有 $\begin{cases} L^{-1}\gamma_\mu L = \alpha_{\mu\nu}\gamma_\nu \\ \alpha_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \\ L = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \end{cases}$

故$[\gamma_\mu, I_{\rho\nu}] = \gamma_\nu\,\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\,\delta_{\nu\mu}$

对于表示$D^{1/21/2}$,表示对象是矢量场:

$$I_{\mu\nu\rho\sigma} = (\ \delta_{\mu\sigma}\ \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\ \delta_{\nu\sigma}) \qquad (5.10.6)$$

另一方面，在无穷小洛仑兹变换(5.10.1)下，任意场量有

$$\delta\psi_\alpha(x_\mu) \equiv \psi_\alpha'(x_\mu') - \psi_\alpha(x_\mu) = [\psi_\alpha'(x_\mu') - \psi_\alpha(x'_\mu)] + [\psi_\alpha(x_\mu') - \psi_\alpha(x_\mu)]$$

$$= \bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu') + \frac{\partial\psi_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\nu}dx_\nu$$

又 $\bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu') = \bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu) + \in_{\tau\nu}x_\nu \dfrac{\partial\ \bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\tau}$

$= \bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu) + O^2$ （高阶无穷小，如果$\dfrac{\alpha\overline{\delta\psi}_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\tau}$是小量）。

因此上式可写为

$$\delta\psi_\alpha(x_\mu) = \bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu) + \in_{\nu\tau}x_\tau \frac{\partial\psi_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\nu}$$

或

$$\bar{\delta}\,\psi_\alpha(x_\mu) = \delta\psi_\alpha\ (x_\mu) - \in_{\nu\tau}x_\tau\ \frac{\partial\psi_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\nu} \qquad (5.10.7)$$

式中 $\delta\psi_\alpha(x_\mu)$ 代表在无穷小洛仑兹变换（5.10.1 ）下，场量的总改变量。 $\bar{\delta}\psi_\alpha(x_\mu)$ 仅代表在无穷小变换（5.10.1 ）下，场量函数形式的变化所引起的函数值的改变，叫作形式变分。

由（5.10.3）和（5.10.7）中消去 $\delta\psi_a(x_\mu)$ 立刻就可得：

$$\bar{\delta}\psi=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu}+\right.$$

$$\left.+\left(\varepsilon_{\mu\nu}x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\right)\psi$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left(I_{\mu\nu}+\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\right)\psi$$

(5.10.8)

这就是在任意无穷小变换（5.10.1）下，场函数的形式变分的普遍式。如果(5.10.1)代表纯空间转动变换，则(5.10.8.)式变为

$$\bar{\delta}\psi=\frac{1}{2}\varepsilon_{ik}[I_{ik}+(x_i\partial_k-x_k\partial_i)]\psi\quad(i,k=1,2,3)$$

(5.10.9)

定义 $\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}=ip_k$，$p_k$是位移算符。代入(5.10.9)式得：

$$\bar{\delta}\psi=\frac{i}{2}\varepsilon_{ik}\left[\frac{1}{i}I_{ik}+(x_ip_k-x_kp_i)/\hbar\right]\psi$$

$$=\frac{i}{2}\varepsilon_{ik}(S_{ik}+L_{ik})\psi\tag{5.10.10}$$

式中 $S_{ik}\equiv\frac{\hbar}{i}I_{ik}\qquad L_{ik}\equiv(x_ip_k-x_kp_i)/\hbar$

令 $S_1=S_{23}$，$S_2=S_{31}$，$S_3=S_{12}$。

$L_1=L_{23}$，$L_2=L_{31}$，$L_3=L_{12}$。

可得出

$$[L_i,L_j]=i\epsilon_{ijk}L_k\tag{5.10.11}$$

$$[S_i,S_j]=i\epsilon_{ijk}S_k\tag{5.10.12}$$

而 $L^2=L_1{}^2+L_2{}^2+L_3{}^2$与$L_i$都可对易。

$$S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$$ 与S_i都可对易。

由（5.10.11）和（5.10.12）及条件$L_3{}^2\leqslant L^2$、$S_3{}^2\leqslant S^2$，可以解出下述二个联立本征值方程组

$$\begin{cases}L^2\psi=\lambda_l{}^2\psi\\ L_3\psi=m_l\psi\end{cases} \tag{5.10.13}$$

$$\begin{cases}S^2\psi=\lambda_s{}^2\psi\\ S_3\psi=m_s\psi\end{cases} \tag{5.10.14}$$

的本征值分别为 $\lambda_l=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$

$$m_l=-l,\ -(l-1),\ \cdots,\ (l-1),\ l \tag{5.10.15}$$

$$\lambda_s=\sqrt{s(s+1)}\,\hbar$$

$$m_s=-s,-(s-1),\cdots,\ (s-1),s. \tag{5.10.16}$$

$M_{ik}=S_{ik}+L_{ik}$是通常所谓场量的角动量算符。场方程在R_3群下的不变性，按诺特定理，要求M_{ik}是守恒算符，即本征值应是守恒量。大家知道，L_{ik}就是熟知的轨道角动量算符。下面我们找出S_{ik}的物理意义。

把粒子置于原点($x_i=0$)，则L_{ik}，$M_{ik}=S_{ik}$。可见，S_{ik}是和粒子的轨道运动无关，仅仅反映粒子的内部运动的一个角动量算符。它的本征值s即代表粒子的自旋量子数。

我们看到 $\bar{\delta}\psi=\frac{1}{i\hbar}\varepsilon_{ik}M_{ik}\psi$表示场函数的形式变分，确定场的总角动量，而 $\delta\psi=\frac{1}{i\hbar}\varepsilon_{ik}s_{ik}\psi$ 即场函数的总改变量，确定场的自旋。由(5.10.14)和(5.10.16)知，s 取确定值的粒子可处于（$2s+1$）个不同的本征态ψ_{sm_s}。按照转动不

变往要求，场量应属于 R_3 群的某个表示 D_J 中的表示对象 ψ_{jm_s}。它们共同支撑一个 $(2s+1)=(2j+1)$ 维表示空间，因此 $J=s$。

显然，R_3 群不可约表示 D^j 中 j 即基本粒子的自旋量子数。固有洛仑兹群 L_P 的表示 $D^{jj'}$ 在纯空间变换下退化为 D^j 表示的直积。因此，直积分解中每个不可约表示 $D^{j+j'-l}$ 中的 $(j+j'-l)$ 均代表基本粒子的自旋量子数。因此，一个洛仑兹协变场量的自旋并不唯一，由(5.5.9)知共有 $(2j+1)$（当 $j<j'$）或 $(2j'+1)$（当 $j'<j$）个不同取值。如果我们要求 L_P 群的表示 $D^{jj'}$ 仅描述最大自旋的不可约表示 $D^{j+j'}$。由于后者的表示对象只有 $2(j+j')+1$ 个而前者的表示对象共有 $(2j+1)\times(2j'+1)=4JJ'+2(J+J')+1$ 个，故须在表示对象间引入 $4jj'$ 个辅助条件。例 $D^{1/2\,1/2}$ 既含自旋是1的矢量粒子也含有自旋是0的标量粒子。为了排除后者必须引入 $4jj'=1$ 个辅助条件，这就是大家熟悉的洛仑兹条件。

参考文献

（1）斯米尔诺夫：《高等数学教程》Ⅲ卷1分册。

（2）留巴尔斯基：《群论及其在物理学中应用》。

（3）C. Mφller «The theory of relativity».

（4）P. Roman «Theory of elementary particles».

（5）M. Hamermesh; «Group Theory and it's application to Physical problems».

附　　录

一、SU(3)的Clebsch—Gordon系列

公式：

$$(n,m)\otimes(n'm')^{*}=\sum_{i=0}^{\min(n,m')}\sum_{j=0}^{\min(n',m)}(n-i,n'-j;\ m-j,m'-j) \qquad (A.1)$$

$$(n,n';m,m')=(n+n',m+m')$$

$$\oplus\sum_{i=1}^{\min(n,n')}(n+n'-2i,m+m'+i)$$

$$\oplus\sum_{j=1}^{\min(m,m')}(n+n'+j,m+m'-2j) \qquad (A.2)$$

维数公式：

$$dim(n,m)=\frac{1}{2}(n+1)(m+1)(n+m+2) \qquad (A.3)$$

例1：$(1,1)\otimes(1,1)$

由$(A.1)$，$(1,1)\otimes(1,1)=(1,1;11)\oplus(1,0;01)\oplus(0,1;1,0)\oplus(0,0;00)$

由$(A.2)$　$(1,1;1,1)=(2,2)\oplus(0,3)\oplus(3,0)$

$(1,0;01)=(1,1)$

$(0,1;10)=(1,1)$

$(0,0;0,0)=(0,0)$

由$(A.3)$　$8\otimes8=27\oplus10\oplus\overline{10}\oplus8\oplus8\oplus1$

例2：　$(2,2)\otimes(3,0)$

由$(A.1)$　$(2,2)\otimes(3,0)$

$= (2,3;2,0) \oplus (2,2;1,0) \oplus (2,1;0,0)$

由(A.2) $(2,3;2,0) = (5,2) \oplus (3,3) \oplus (1,4)$

$(2,2;1,0) = (4,1) \oplus (2,2) \oplus (0,3)$

和 $(2,1;0,0) = (3,0) \oplus (1,1)$

由(A.3) $27 \otimes 10 = 81 \oplus 64 \oplus 35 \oplus \overline{35} \oplus 27 \oplus \overline{10} \oplus 10 \oplus 8$

二、 U(n),SU(n)的杨图的维数公式

公式：

$U(n)$或$SU(n)$的杨图 [杨图：第一行6格…，第二行4格…，第三行2格…，第四行1格…] 的维数

$=$ 杨图的

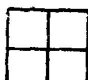
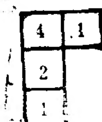
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	· ·
$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	· ·		
$n-2$	$n-1$	· ·				
$n-3$	· ·					

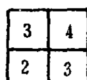
整数乘积。

$\div$ 杨图的 [钩长示意图] 钩长(*hooklength*)的格子数的乘积。

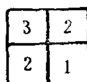
• 相应于正文中$(2J_1, 2J_2)$.

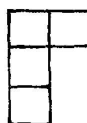
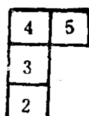
例：

$U(3)$的杨图  的维数 



$$=\frac{\quad}{\quad}=\frac{4\cdot3\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot2\cdot1}=6.$$



$SU(4)$的杨图  的数维 

$$=\frac{\quad}{\quad}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot2\cdot1\cdot1}=15.$$

[General Information]
书名=李群和李代数简介
作者=曹雨芳 刘辽编
页数=144
SS号=10068981
DX号=
出版日期=1987年02月第1版
出版社=北京师范大学出版社